

Nuevas herramientas para la Administración del Riesgo Crediticio: El caso de una Cartera Crediticia Ecuatoriana

DIEGO MALDONADO

MARIELA PAZMIÑO*

Resumen

En el presente documento se expone de manera abstracta los modelos de portafolios crediticios CreditMetricsTM, KMV, CreditRisk⁺, Credit Portfolio View y CyRCE de tal forma que puedan ser calibrados e implementados en instituciones financieras donde la calidad y cantidad de información crediticia es escasa, dando lugar a que dispongan de herramientas capaces de monitorear el riesgo y la concentración vigente en un portafolio crediticio, y generar políticas crediticias para mitigar el riesgo asumido en el portafolio por medio de las provisiones, capital económico y límites a los montos de los créditos. Para lo cual se aplican los modelos cópulas, las cuales cuantifican la dependencia existente entre los créditos incumplidos y determinar así la distribución de pérdida de un portafolio a partir de los modelos de variables latentes, mixtura y concentración crediticia.

Abstract

In the present document it is exposed in an abstract way the models of credit portfolios CreditMetricsTM, KMV, CreditRisk⁺, Credit Portfolio View in such a way that they could be calibrated and implemented in financial institutions where the quality and quantity of credit information is scanty, giving place to which they have capable tools for monitoring the risk and the concentration in a credit portfolio, and to generate credit policies to mitigate the risk assumed in the portfolio by means of the provisions, the economic capital and limits to the amounts of the credits. For which the models apply themselves copulas to quantify the existing dependence between the unfulfilled credits and to determine this way the distribution of loss of a portfolio from the models of latent variables, mixture and credit concentration.

*Funcionarios de la Dirección de Investigaciones Económicas del Banco Central del Ecuador y la Intendencia Nacional de Instituciones Financiera de la Superintendencia de Banco y Seguros del Ecuador, respectivamente. Los autores agradecen a Adán Díaz-Hernández, Enrique Navarrete, Xavier Márquez y Mauricio Tola por sus valiosos comentarios y sugerencias. Las opiniones vertidas en este documento son de responsabilidad exclusiva de los autores y no representan la posición oficial del Banco Central del Ecuador ni la Superintendencia de Bancos. Para cualquier comentario o sugerencia favor comunicarse con dmaldonado@bce.fin.ec. ó mpazmino@superban.gov.ec.

1. Introducción

La principal actividad de un banco¹ es la *intermediación financiera* la que permite transferir los recursos entre individuos que poseen un sobrante a individuos que necesitan dinero extra para consumirlo e invertirlo. Esta actividad económica conlleva ciertos aspectos que pueden ocasionar pérdidas al banco, por ejemplo puede darse el evento de que todos los depositantes reclamen sus ahorros al mismo tiempo y el banquero no disponga del suficiente dinero en sus cajas para cubrir la demanda de los depositantes, por otro lado puede ocurrir que algunos de los acreedores de los créditos no paguen y provocar pérdidas. Así, la intermediación financiera puede ocasionar que el banco aumente la posibilidad de enfrentar pérdidas e incumplir las deudas contraídas, lo que forzaría al banco a salir del negocio, por lo que es de suma importancia disponer de herramientas eficientes para el monitoreo, gestión y control del riesgo² de tal forma que permitan desarrollar metodologías y/o políticas para mitigar las pérdidas que puede incurrir una institución financiera. Estas herramientas deben ser capaces de anticiparse a posibles resultados adversos lo que permitiría a los administradores planificar adecuadamente la gestión bancaria y de esta forma garantizar la calidad de los portafolios de la institución financiera.

En este sentido, el principal objetivo de la administración del riesgo es el de garantizar que el riesgo asumido por la institución financiera sea cubierto por un cierto capital capaz de absorber las máximas pérdidas que puede incurrir la institución financiera, garantizando que siga en el negocio bancario.

Una de las principales preocupaciones que tienen los administradores de riesgo es la ocurrencia desproporcional y de manera conjunta de los incumplimientos que pueden darse en un portafolio de préstamos debido al impacto que tienen en el nivel de pérdidas y por ende en el capital económico de la institución financiera, situación que normalmente se le conoce como *riesgo de crédito³ extremo*. De lo anterior, se evidencia la necesidad que la institución disponga de modelos capaces de capturar la dinámica de portafolio de crédito y cuantificar el nivel de riesgo que ésta conlleva, logrando así medir la pérdida

¹A pesar que nos referimos a los Bancos esto se generaliza para cualquier institución financiera.

²Existen diferentes riesgos a los que están expuestas las instituciones financieras, siendo los principales: Riesgo de Mercado, Riesgo de Crédito, Riesgo Operativo y Riesgo de Liquidez.

³Según la normativa de la Superintendencia de Bancos y Seguros del Ecuador (SBS), el riesgo de crédito se puede definir como "*la posibilidad de pérdida debido al incumplimiento del prestatario o la contraparte en operaciones directas, indirectas o de derivados que conlleva el no pago, el pago parcial o la falta de oportunidad en el pago de las obligaciones pactadas*".

que puede tener el portafolio en un horizonte de tiempo dado.

El desarrollo de modelos para portafolios crediticios es fundamental para una eficaz administración ya que permiten disponer de indicadores para monitorear el riesgo que se encuentra implícito en el portafolio, lo que ayuda a asignar de manera adecuada el capital que necesita la institución financiera para afrontar el nivel de riesgo asumido. Existe una gran cantidad de indicadores de riesgo para portafolios crediticios, siendo los más importantes los siguientes: *Valor en Riesgo*⁴ (*VaR*), *Déficit Esperado*⁵ (*ES*), *Pérdida Esperada*⁶ (*PE*) y *Pérdida no Esperada* (*PNE*)⁷, éstas permiten diseñar políticas para mitigar las pérdidas que puede tener el portafolio; como por ejemplo, *la provisión* que es un fondo de contingencia para proteger la cartera de crédito, representa el porcentaje del crédito original que las autoridades financieras esperan que se pierda dado el deterioro actual de la cartera; *el capital económico*, corresponde a un fondo que conforman los accionistas del banco para afrontar las pérdidas potenciales que son mayores a lo esperado por la cartera de crédito, éstas pérdidas están asociadas a cambios en la calidad de la cartera de crédito en el tiempo y están compuestas por riesgos crediticios que no se consideran como probables o estimables en la fecha de evaluación, pero que pueden ocurrir en el futuro; *límites de crédito*, que constituyen una política ampliamente utilizada por los bancos ya que permiten controlar o limitar las pérdidas de los créditos en caso de incumplimiento, para lo cual, los administradores deben desarrollar procesos de autorización de los límites de crédito, con los cuales se establece el monto máximo en riesgo que se está dispuesto a asumir con un cliente actual o futuro. Los elementos básicos a considerar para el establecimiento de límites de créditos en una institución financiera son la orientación del banco y su plan anual de negocios, este último plantea el monto total de crédito a otorgar durante un período dado ya sea por grupo económico y/o por crédito individual. Finalmente, el principal uso que tienen estos indicadores de riesgo es establecer criterios para la diversificación de una cartera de crédito debido

⁴Es el cuantil de la distribución de pérdidas y ganancias asociadas a la cartera de crédito, para un período de tiempo y un nivel de confianza dado.

⁵Es la pérdida esperada durante N días, condicionado a que la pérdida sea mayor que un cierto percentil de la distribución de pérdida. Es una medida que produce mejores resultados que el VaR, a veces es referido como un VaR condicional. El VaR hace la pregunta: *¿Cuál puede ser mi mayor pérdida?*, en cambio el ES hace la pregunta: *Si las cosas van mal, ¿Cuál puede ser mi pérdida esperada?*. El ES al igual que el VaR, es función de dos parámetros, el horizonte de tiempo en días y el nivel de confianza.

⁶Es la media de la distribución de pérdidas y ganancias, indica cuanto se puede perder en promedio y está asociada a la política de reserva preventiva que la institución debe tener contra los riesgos crediticios.

⁷Esta medida puede estimarse como la diferencia entre el VaR y la pérdida esperada la misma que permite determinar el Capital requerido por el acreedor para hacer frente las pérdidas no anticipadas.

a que con estos indicadores es posible relacionar la rentabilidad esperada del portafolio con el riesgo asumido por la institución financiera, de tal manera que la institución puede conocer a priori cuanto debe disponer de capital para obtener el nivel de rentabilidad deseado.

De lo presentado hasta el momento, se evidencia la necesidad de disponer de modelos que permitan capturar la dinámica interna de los créditos de un portafolio; sin embargo, su construcción se complica por las siguientes razones:

- *Falta de información.* La escasa información respecto a datos de crédito es el principal obstáculo para utilizar métodos estadísticos para la medición del riesgo de crédito en portafolios, lo que limita la calibración de los modelos de crédito.
- *Sesgo en la distribución de pérdida.* Típicamente la distribución de pérdida de los créditos es fuertemente sesgado, con una relativa cola pesada a la derecha (Figura 1), esto se debe por la misma actividad crediticia, ya que se tiene que de los créditos otorgados en un período la mayoría de ellos pagan según los términos establecidos al inicio del contrato, dando a la institución una pequeña ganancia relacionada con la tasa de interés pactada, pero existen pocos créditos que no realizan sus pagos según lo pactado, permitiendo que la institución pierda tanto el capital como el interés, lo que produce que la pérdida sea mucho mayor que la rentabilidad obtenida por el portafolio crediticio. Es por esta razón que es necesario que el banco disponga de grandes montos para cubrir estas pérdidas.
- *Necesidad de incorporar dependencia en el modelo.* Otro de los grandes inconvenientes es la ocurrencia desproporcional de una gran cantidad de incumplimientos de los créditos para un período particular. Este riesgo es directamente relacionado con la dependencia entre los eventos de incumplimiento, de hecho la dependencia tiene un gran impacto en las pérdidas extremas que puede tener el portafolio crediticio.
- *Gran número de créditos en el portafolio.* Este es otro de los mayores inconvenientes para modelar la pérdida de un portafolio, y es mucho más complejo cuando se toma en cuenta que cada crédito presenta diferentes niveles de exposición, provocando que las pérdidas de cada deudor sean distintas de deudor a deudor. Por lo que el riesgo de la cartera depende de la exposición, número de créditos y concentración de la cartera.

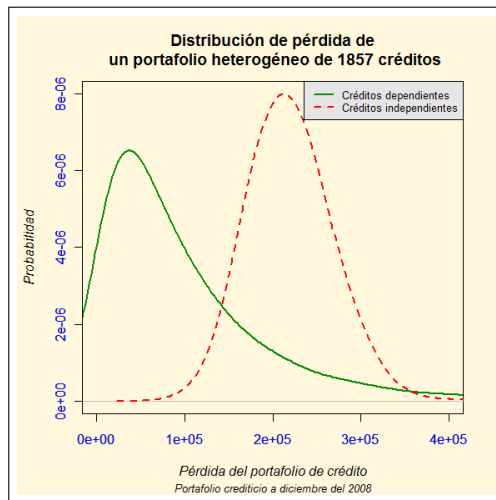


Figura 1: Comparación de la distribución de pérdida estimada de un portafolio de 36646 créditos automotrices cuya estructura de dependencia es diferente.

A nivel mundial se ha desarrollado una variedad de modelos econométricos para cuantificar el riesgo de crédito en un portafolio, los cuales tratan de incorporar los aspectos antes señalados para un portafolio⁸. Dependiendo de la formulación que se haga a los modelos de riesgo de crédito, éstos pueden ser divididos en dos grupos, *los modelos estructurales y los de forma reducida*.

Los *modelos estructurales*, también conocidos como *modelos por umbrales* descienden del modelo propuesto por Merton (1974), el cual presenta un mecanismo para cuantificar el incumplimiento de una empresa en términos de la relación entre los activos y sus obligaciones que deben ser cubiertas al final de un período. Más específicamente, estos modelos fueron desarrollados para medir el nivel de pérdida que puede tener un portafolio formado por créditos corporativos, donde se considera que una empresa cae en incumplimiento cuando sus activos no avanzan a cubrir el nivel de obligaciones de largo y mediano plazo, y para cuantificar la dependencia entre las empresas se considera que existen ciertos factores no observables que son comunes para todas las empresas que controlan el comportamiento estocástico de los activos de las empresas, para lo cual se utilizan los modelos factoriales. Los modelos más conocidos a nivel mundial que se les puede catalogar dentro de este esquema

⁸Los principales objetivos que tienen estos modelos crediticios son: cuantificar la dependencia entre incumplimientos, calibrar el modelo con datos reducidos a partir de métodos estadísticos, estimar la probabilidad de incumplimiento de los créditos, medir la concentración de la cartera.

son: CreditMetricsTM⁹, KMV¹⁰ y Credit Portfolio View¹¹. Los *modelos de forma reducida*, también conocidos como modelos de mixtura son alternativos a los estructurales, y son modelos completamente econométricos donde se pretenden explicar el comportamiento de la probabilidad de incumplimiento de los créditos a partir de ciertas variables exógenas, dando como resultado que la distribución del portafolio sea expresada de forma analítica. El modelo más conocido que se puede catalogar dentro de este esquema es el CreditRisk⁺.¹²

Cabe recalcar que para la implementación de los modelos antes mencionados es necesario: *disponer de una amplia información histórica crediticia, limitar el número de créditos que conforma el portafolio, cuantificar la dependencia entre los créditos a través de una distribución normal multivariada*. Sin embargo, implementar estos modelos en mercados poco desarrollados como el ecuatoriano es complicado ya que las instituciones financieras no disponen de un gran historial crediticio y las carteras están conformadas por miles de créditos, lo que impide la aplicación de los modelos crediticios para portafolios comúnmente utilizados a nivel mundial. El presente documento plantea una metodología para implementar los modelos para portafolios crediticios CreditMetricsTM, Credit Portfolio View, CreditRisk⁺ y el modelo de concentración CyRCE¹³ en carteras de consumo para mercados emergentes como es el caso de las instituciones financieras ecuatorianas donde la calidad y cantidad de información es escasa, para lo cual se plantea de manera abstracta los modelos de variables latentes y los de mixtura, logrando determinar las relaciones, similitud y diferencias entre ambos modelos, lo que permite determinar

⁹Este modelo fue desarrollado en 1997, por un grupo de instituciones financieras estando a la cabeza J.P Morgan, este modelo supone que el riesgo de crédito depende de los cambios de la calificación crediticia que es reflejado a través de una matriz de transición, que provee el mecanismo probabilístico que modela la migración de la calidad de los créditos.

¹⁰Esta metodología es la que trata de llevar a la práctica el modelo de Merton de la forma más directa y difiere significativamente de CreditMetricsTM, ya que utiliza las *frecuencias esperadas de impago*, como probabilidades de incumplimiento, en vez de depender de las probabilidades de transición asociadas a algún esquema de calificación.

¹¹En este modelo como paso inicial segmenta al portafolio de acuerdo a la localización geográfica y la actividad económica de los créditos, y por medio de funciones logit, trata de explicar las probabilidades de incumplimiento de cada segmento del portafolio, donde los índices de variables macroeconómicas son consideradas como variables explicativas.

¹²Este modelo se deriva a partir de conceptos de tipo actuarial y tiene la característica que las probabilidades de incumplimiento son explicadas por ciertos factores de riesgo, cada uno de ellos distribuido de acuerdo con una distribución gamma independiente.

¹³El modelo de impago denominado "*Capitalización y Riesgo de Crédito*" (CyRCE), desarrollado por el Phd. en Ciencias Matemáticas Javier Márquez Diez Canedo Gerente de Riesgos del Banco de México, es una buena alternativa para mercados emergentes en donde la problemática está definida alrededor de la limitación en la información y brinda apoyo en la administración de riesgos y solucionar el problema de cómo utilizar la distribución de probabilidad de pérdida para *identificar dimensiones de concentración de riesgo excesivo y fijar límites de crédito* a partir de una medida de riesgo que para este caso es el Valor en Riesgo (VaR) de una cartera de créditos.

un modelo general para cualquier portafolio crediticio que sea aplicable para el mercado crediticio ecuatoriano. En este contexto, es necesario mencionar que para el desarrollo de éstos modelos es fundamental cuantificar la dependencia contemporánea entre créditos incumplidos y no condicionar a una distribución en particular¹⁴, para lo cual se utiliza el modelo de dependencia llamado *cópula*, esta función no realiza supuestos sobre las distribuciones marginales de las variables aleatorias, ni tampoco sobre la relación de dependencia entre ellas, permitiendo que capture la dinámica real entre las variables aleatorias ya que aproxima la distribución conjunta de variables aleatorias a partir de sus distribuciones marginales, y para el caso de riesgo de crédito aproxima la distribución de pérdidas del portafolio a partir de las distribuciones marginales de los créditos incumplidos, lo que permite cuantificar de manera adecuada la pérdida extrema del portafolio.

El resto del documento está compuesto de la siguiente forma: en la segunda sección se presenta los supuestos utilizados para la construcción de los modelos de riesgo de crédito, y las principales características de los modelos de riesgo de crédito CreditMetrics^{MT}, KMV, CreditRisk⁺. En la tercera sección se presenta el concepto de cópulas, propiedades y sus diferentes familias. En la cuarta sección, se presentan las definiciones, propiedades de los modelos de riesgo de crédito por umbrales, mixtura y concentración crediticia. En la sección quinta, se presenta la aplicación de los modelos crediticios en una cartera de créditos automotrices y finalmente en la sexta sección se detallan las conclusiones.

2. Modelos de riesgo de crédito

Supónganse que se dispone de un portafolio con N préstamos o bonos, y el administrador quiere conocer el valor del mismo al final de un año, el primer inconveniente para determinar dicho valor es conocer el comportamiento que puede tener cada préstamo. Un préstamo al final del año puede estar en uno de los siguientes estados: cumplir o incumplir el pago del préstamo según lo pactado, desde el punto de vista estadístico, este comportamiento se puede considerar como un experimento de Bernoulli, y se lo define de la siguiente manera:

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{con probabilidad } p_i \\ 0 & \text{con probabilidad } 1 - p_i \end{cases}$$

donde, la variable X_i , toma el valor de 1 cuando el préstamo i ha incumplido, con una probabilidad p_i , es decir, $p_i = P\{X_i = 1\}$ y esto ocurre para todos

¹⁴Como es el caso de la distribución normal multivariada que es utilizada en todos los modelos para portafolios crediticios.

los préstamos $i = 1, \dots, N$.

Si el estado del préstamo es el incumplimiento en un período futuro T , entonces el prestamista solamente recibe un porcentaje del total de la deuda, cuyo porcentaje corresponde a la tasa de recuperación, esta tasa se considera aleatoria ya que dependen de la calidad crediticia del préstamo; es decir, si el préstamo tiene una mala calificación por ejemplo E , entonces la tasa de recuperación será baja, ya que para recuperar el monto prestado se tiene que incurrir en costos legales, operacionales y de cobranza, situación que sucede lo contrario cuando tienen una buena calificación crediticia.

Si denotamos por r_i a la tasa de recuperación, y L_i al valor del préstamo, entonces la pérdida del portafolio en un período de tiempo T será:

$$L = \sum_{i=1}^N X_i(1 - r_i)L_i$$

Así tan pronto conozcamos la distribución multivariada del vector aleatorio $(X_1, \dots, X_N, r_1, \dots, r_N)$, la distribución de pérdida del portafolio al período T queda completamente especificado.

Dado que la dependencia entre la tasa de recuperación y el incumplimiento no es tan fácil de comprender, los modelos de riesgo crédito que se han desarrollado a nivel internacional (KMV, CreditMetricsTM, RiskMetrics⁺) asumen que la tasa de recuperación se la puede considerar determinística, de tal manera que solamente es necesario conocer la distribución multivariada del vector aleatorio (X_1, \dots, X_N) , para determinar la distribución de pérdida del portafolio de crédito.

Desde el punto de vista estadístico existen tres problemas a tomar en cuenta cuando se modela la distribución de pérdida de un portafolio de crédito:

1. Dependencia entre incumplimientos
2. Número de créditos del portafolio
3. Falta de información histórica

Los modelos que de alguna manera han tratado de manejar los anteriores problemas son los modelos CreditMetricsTM, KMV y CreditRisk⁺, de los cuales se pueden considerar que el KMV y el modelo CreditMetricsTM son equivalentes siempre y cuando restrinjamos al CreditMetricsTM a un portafolio de pérdidas para un período. En ambas aproximaciones se considera que el

retorno del logaritmo de los activos siguen una distribución normal multivariada, además se considera que una empresa cae en incumplimiento en el período T siempre y cuando el valor de los activos cae muy por debajo de un cierto umbral o equivalentemente cuando el logaritmo estandarizado del retorno de los activos caen por debajo de un punto de incumplimiento DD .

En ambos modelos la estimación de las correlaciones del logaritmo de los retornos de los activos utilizan los modelos factoriales. Debido a esta equivalencia matemática entre estos modelos, se puede decir que los modelos descritos¹⁵ en esta sección se pueden resumir en KMV/CreditMetricsTM y CreditRisk⁺ donde las principales características son:

- KMV/CreditMetricsTM

$$\begin{aligned} Z &= \text{Retorno de los activos estandarizado} \\ &\sim N(0, \Sigma), \Sigma = \text{Matriz de correlaciones} \\ Z_i &= \sum_{j=1}^K a_{ij} R_j + \varepsilon_i \text{ (Modelo Factorial)} \\ X_i &= \text{Indicador de incumplimiento de la empresa } i \\ &= I_{\{z_i < DD_i\}} = I_{\{z_i < \phi^{-1}(p_i)\}} \\ p_i &= \text{Probabilidad de incumplimiento de una empresa } i \end{aligned}$$

- CreditRisk⁺

$$\begin{aligned} X_i &= \text{Indicador de incumplimiento de la empresa } i, X_i \sim \text{Bernoulli}(p_i) \\ p_i &= \bar{p}_i \sum_{j=1}^K a_{ij} R_j, \text{ (Modelo Factorial)}, \sum_{j=1}^K a_{ij} = 1 \\ \bar{p}_i &= \text{Probabilidad de incumplimiento promedio de la empresa } i \end{aligned}$$

3. Modelos cópulas

En las secciones anteriores, se realizó una descripción detallada de los modelos de riesgo de crédito más populares, que pueden ser divididos en dos clases, los *modelos de variables latentes* y los *modelos de mixtura*. En particular, estos modelos tienen por objetivo determinar la distribución de pérdida

¹⁵Un mejor detalle de estos modelos puede encontrarse en los documentos de Crounhy, Galai y Mark (2000), Gordy Michel (2000) y Nyfeler Mark (2000).

y ganancia del portafolio crediticio que se encuentra altamente influenciado por el incumplimiento simultáneo de los créditos; en este sentido, es necesario que el modelo de riesgo de crédito para portafolios cuantifique la dependencia entre créditos incumplidos a través de su respectiva distribución conjunta. Los modelos populares de riesgo de crédito imponen una estructura de dependencia del portafolio a partir del supuesto de que la distribución conjunta de los créditos incumplidos siga una ley normal multivariada, donde esta distribución tiene la característica de ser simétrica y presentar colas livianas; situación que es muy irreal para el caso de riesgo de crédito.

Una medida alternativa de dependencia muy útil para modelar la distribución multivariada es la función *cópula*, que une en una distribución de probabilidad multivariada a una colección de funciones de probabilidad marginales univariadas y así determinar la estructura de dependencia. A través de cópulas se libera el supuesto de que los créditos incumplidos sigan una distribución normal multivariada, más aún permite unir las distribuciones marginales de los incumplimientos en diferentes estructuras de dependencia lo que permite obtener una estructura de dependencia particular para la distribución conjunta del portafolio y obtener una descripción más realista de las características empíricas de los créditos incumplidos, así las cópulas constituyen ser una herramienta que es capaz de cuantificar las pérdidas extremas de una cartera de créditos.

En este sentido, las cópulas es un punto referencial para la construcción y calibración de los modelos de riesgo de crédito, en la presente sección se hace una descripción más detallada de esta herramienta econométrica.

3.1. Cópulas y sus propiedades

En la teoría financiera, el concepto de correlación es de suma importancia ya que juega un papel central en los modelos financieros, por ejemplo en el modelo de valuación de activos de capital (CAPM), o en la teoría de arbitraje (APT), donde utilizan la correlación como una medida de dependencia entre diferentes instrumentos financieros ya que la teoría se fundamenta en la suposición que los retornos de los factores de riesgo¹⁶ siguen una distribución normal multivariada.

A menudo, cada vez más se ha utilizado a la correlación como una medida de dependencia en la administración de riesgo, donde se supone que el retorno

¹⁶Se considera a ciertas variables estocásticas que inciden o controlan el comportamiento de los instrumentos financieros tales como las acciones, bonos, el incumplimiento de un crédito, etc.

de los factores de riesgo se distribuye normalmente; sin embargo, este supuesto es completamente inaceptable para el caso del riesgo de crédito donde la distribución de las pérdidas no es simétrica y se caracteriza por tener la cola de la derecha pesada; es decir, que tiene mayor frecuencia la ocurrencia de créditos incumplidos.

A pesar que la correlación es un concepto que se utiliza en las finanzas modernas, es mal entendido, debido a que ésta se generaliza como una medida de dependencia, donde solamente es adecuado para el caso de las distribuciones normales multivariadas y más generalmente en las distribuciones esféricas y elípticas. Las distribuciones elípticas¹⁷ son distribuciones cuya densidad son elipsoides constantes; por ejemplo, para el caso de una distribución t bivariada, las líneas de contorno de la superficie de la densidad son elipses tal como se aprecia en la Figura 2.

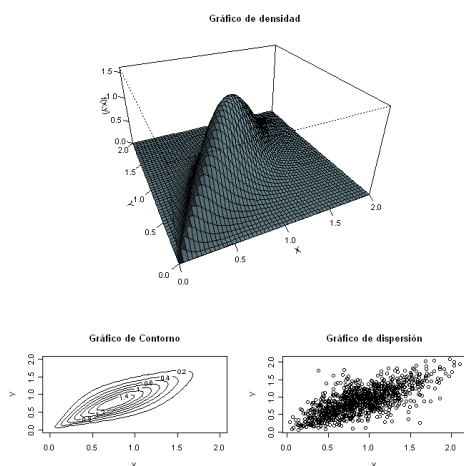


Figura 2: Gráfico de densidad, contorno y dispersión de una distribución t bivariada con correlación del 70% y marginales con distribuciones gamma.

En la distribución elíptica, es natural utilizar la matriz de correlación como un resumen de la estructura de dependencia, además en el mundo de las distribuciones elípticas tiene sentido la optimización de portafolios (Markowitz, CAPM). Cabe mencionar que en esta distribución si los componentes no están correlacionados no significa que sean independientes, solamente en la distribución normal multivariada la correlación nula se interpreta como independencia.

¹⁷La distribución normal multivariada es un caso especial.

Fuera del mundo de las distribuciones elípticas, la correlación debe utilizarse con cuidado. Desafortunadamente, la mayor parte de la dependencia entre los riesgos financieros no presentan una distribución elíptica, tan solo en el riesgo de mercado la distribución normal o elíptica aparentemente tiene sentido utilizarlo.

De lo mencionado anteriormente, es necesario tener claro el concepto de correlación para lo cual se la puede describir de la siguiente manera:

- Es una medida de relación lineal entre variables aleatorias
- Correlación cero no implica independencia, esto sólo es verdad con las variables aleatorias gaussianas;
- La correlación es la covarianza de dos variables aleatorias divididas por sus desviaciones típicas.

A partir de esto, surgen algunas preguntas importantes respecto a la correlación, tales como *¿Cuándo existe la correlación?*, *¿Qué significa correlación en el contexto de variables gaussianas?*, *¿Qué sucede con la correlación si no tratamos con variables gaussianas?*

Normalmente, una de las primeras cosas que se hace para analizar un conjunto de series financieras es estimar la correlación, pero *¿Qué significa este número?*, recordemos que la correlación lineal o de Pearson se define como:

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)}\sqrt{\text{Var}(Y)}}, \quad (1)$$

pero en el caso de una distribución t de student, la varianza es:

$$\text{Var}(X) = \frac{C}{C - 2},$$

donde C es el número de grados de libertad. Por lo que para valores de $C \leq 2$, la expresión anterior no es un número real positivo, es decir para 2 o menos grados de libertad la varianza no existe, por lo que la varianza no converge a pesar que se aumente el tamaño de muestra. *De lo anterior se puede afirmar que cualquier par de variables aleatorias cuyas distribuciones presenten colas pesadas no están correlacionadas; sin embargo, esto no significa que*

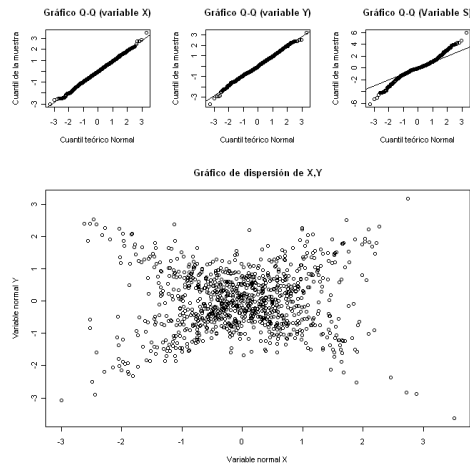


Figura 3: Gráficos Q-Q de las variables aleatorias normales X, Y y de la variable $S=X+Y$, y gráfico de dispersión de las variables normales X, Y que tienen correlación cero.

no estén relacionadas entre sí (linealmente o no).

Muchos de los problemas, restricciones y cuidados que se han de tener con el concepto de correlación parece que se acaban cuando se trabaja con variables aleatorias gaussianas ya que este tipo de distribuciones no tienen colas pesadas; sin embargo, esto no es verdad, para aclarar esto se generan dos variables aleatorias a partir de distribuciones normales estándar, cuya correlación es cero, tal como se presenta en la Figura 3, donde claramente se observa en el Gráfico de dispersión que las variables aleatorias X, Y no son independientes. Para ser más específico, la correlación es una buena medida de dependencia cuando las variables aleatorias X, Y siguen una *distribución normal multivariada*, con la característica que los marginales siguen una distribución normal y la suma de sus componentes es normal.

Por lo tanto, *dos variables aleatorias normales no correlacionadas no tienen por qué ser independientes; solo lo será si la distribución conjunta de las variables es también gaussiana.*

De lo presentado hasta este momento, se observa que la correlación tienen algunos problemas cuando se generaliza como una medida de dependencia, a continuación detallamos una lista de problemas que tiene la correlación cuando

se utiliza como una medida de dependencia en el riesgo financiero¹⁸:

1. La correlación es simplemente una medida de dependencia, y no dice todo lo que se quisiera conocer sobre la estructura de dependencia de los riesgos financieros (como por ejemplo la dependencia entre los valores extremos); al ser una medida escalar este resume toda la relación de dependencia entre los factores de riesgo en un solo número, aunque facilita la interpretación, puede tener inconvenientes en la toma de decisiones; en la Figura 4, se muestra cómo es posible tener dos variables aleatorias que tiene una correlación del 70 %, pero sin embargo se llega a conclusiones completamente diferentes.
2. Los valores que puede tener la correlación depende de la distribución de los marginales de los índices de riesgos.
3. Dependencia perfecta positiva o negativa entre los índices de riesgos, no necesariamente tiene correlación de 1 o -1 respectivamente.
4. Una correlación de cero no indica independencia entre los riesgos
5. La correlación solamente es invariante ante transformaciones lineales; por ejemplo, $\log(X)$ y $\log(Y)$ generalmente no tiene la misma correlación de X y Y .
6. La correlación solamente es definida cuando la varianza de los índices de riesgos es finita, ésta no es una apropiada medida de dependencia cuando las distribuciones presentan colas pesadas donde la varianza es infinita.

Se puede observar que la *correlación lineal* tiene algunos limitantes para medir la dependencia, por lo que es necesario identificar otras medidas de dependencia, tales como las *medidas de correlación de rango* y los *coeficientes de dependencia en las colas*.

Las medidas de correlación de rango, miden el grado de dependencia entre dos variables aleatorias sin suponer que la relación de dependencia sea lineal; además, estas correlaciones requieren solamente que las variables sean medidas en nivel ordinal, es decir la estimación empírica de las medidas de correlación de rango pueden ser calculadas de forma no paramétrica a partir de los rangos de los datos, además estas medidas de correlación de rango son invariantes bajo transformaciones monótonas crecientes. *El coeficiente de dependencia en las colas*, permite medir la dependencia existente entre los valores extremos de las variables aleatorias, esta característica es importante en la medición de

¹⁸Esta lista de problemas que tiene la correlación como una medida de dependencia fue tomada del documento de Embrechts, McNeil y Daniel Straumann.

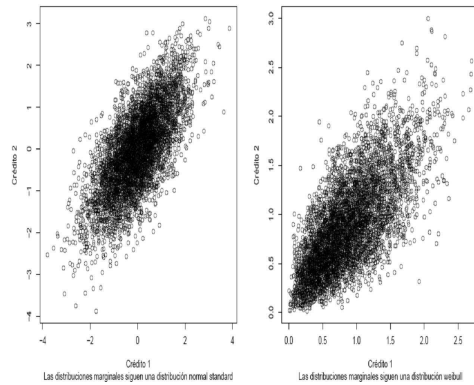


Figura 4: Simulación de 5000 realizaciones de dos variables aleatorias Weibull con coeficiente de correlación 0.7 y dos estructuras de dependencias diferentes.

riesgo financiero y en la administración de portafolio.

A pesar que éstas medidas de dependencia no presentan los limitantes de la correlación lineal, hay que mencionar que con estas no es posible modelar la dependencia de un sistema de d factores de riesgo, sin embargo existe una medida de dependencia que no tiene este limitante y es la llamada función *Cópula*.

La cópula permite modelar la dependencia entre d factores de riesgo a través de una función que satisface algunas propiedades particulares que la hacen ideal para modelar dependencia, esta aproximación tiene la ventaja de presentar el concepto de dependencia como una estructura que describe completamente la relación entre los factores de riesgo, en lugar de tratar de resumirla en un solo número. No obstante, pensar en una estructura de este tipo implica una mayor complejidad en su interpretación.

Las principales ventajas que tiene la cópula como una adecuada medida de dependencia son las siguientes:

- Extrae la estructura de dependencia de la función de distribución multivariada, por lo que tiene mucha más información acerca de la dependencia entre d variables aleatorias que la puede contener en un sólo número.
- Toma en cuenta todos los posibles casos de dependencia.
- Es invariante ante transformaciones monótonas crecientes incluyendo las transformaciones afines positivas.

- Permite representar una estructura de dependencia de variables aleatorias donde sus respectivas funciones marginales no incide en esta estructura.
- Se puede obtener las *medidas de correlación de rango* y los *coeficientes de dependencia en las colas*, lo que permite medir la dependencia de manera general.

Para definir una cópula se empieza considerando d variables aleatorias con distribuciones uniformes estándar U_1, \dots, U_d , que pueden estar relacionadas. La dependencia entre estas variables aleatorias queda completamente descrita a través de su función de distribución conjunta.

$$F(u_1, \dots, u_d) = \mathbb{P}[U_1 \leq u_1, \dots, U_d \leq u_d] \quad (2)$$

En ausencia de un modelo que permita cuantificar la dependencia entre las d variables aleatorias, se utiliza la correlación como una medida de dependencia; sin embargo, esta presenta ciertos limitantes. Si se podría disponer de un modelo parecido a la función de distribución conjunta F , entonces se conocería todo lo que se debería conocer de la dependencia entre las d variables aleatorias. La idea de separar de F una parte que describe la estructura de dependencia y otra que describe el comportamiento de los marginales es el que se centra el concepto de cópula.

La cópula es una función de distribución multivariada $C : [0, 1]^d \rightarrow [0, 1]$ donde sus distribuciones marginales son uniformes estándar $U_i \sim U(0, 1)$ $i = 1, 2, \dots, d$. La cópula posee las siguientes propiedades:

- i) $C(u_1, \dots, u_d)$ es creciente en cada componente u_i
- ii) $C(1, \dots, 1, u_i, 1, \dots, 1) = u_i$ para todo $i \in \{1, 2, \dots, d\}$, $u_i \in [0, 1]$.
- iii) Para todo $(a_1, \dots, a_d), (b_1, \dots, b_d) \in [0, 1]^d$ con $a_i \leq b_i$ se tiene que:

$$\sum_{i_1=1}^2 \dots \sum_{i_d=1}^2 (1)^{i_1+\dots+i_d} C(u_{1i_1}, \dots, u_{di_d}) \geq 0$$

donde $u_{j1} = a_j$ y $u_{j2} = b_j$ para todo $j \in \{1, 2, \dots, d\}$.

- iv) Para cada cópula $C(u_1, \dots, u_d)$ se tiene los siguientes límites:

$$\max \left\{ \sum_{i=1}^d u_i + 1d, 0 \right\} \leq C(\mathbf{u}) \leq \min(u_1, \dots, u_d).$$

Sklar [1959] mostró que es posible comprender la estructura de dependencia de un vector aleatorio a través de la cópula a partir de dos observaciones: la primera, que toda función de distribución multivariada de variables aleatorias continuas tiene una cópula asociada y la segunda, que la función de distribución multivariada puede ser construida a partir de una cópula y las funciones de distribución marginales.

Teorema 1 (Teorema de Sklar). *Sea $F(r_1, \dots, r_d)$ la función de distribución conjunta de las variables aleatorias R_1, \dots, R_d , con funciones de distribución marginales $F_1(r_1), \dots, F_d(r_d)$. Existe una función $C[0, 1]^d \rightarrow [0, 1]$ tal que:*

$$F(r_1, \dots, r_d) = C(F_1(r_1), \dots, F_d(r_d)) \quad (3)$$

para todo r_1, \dots, r_d . La función C es conocida como la cópula de variables aleatorias. Si $F_1(r_1), \dots, F_d(r_d)$ son continuas entonces C es única. De otra forma C está definida únicamente en el $\text{Ran}(F_1) \times \dots \times \text{Ran}(F_d)$ donde $\text{Ran}(F_i)$ denota el rango de la función F_i . Análogamente si C es una cópula y $F_1(r_1), \dots, F_d(r_d)$ son funciones de distribución univariadas, entonces $F(r_1, \dots, r_d)$ definida en (3) es una función de distribución conjunta de marginales $F_1(r_1), \dots, F_d(r_d)$.

Existen una gran cantidad de funciones que satisfacen las condiciones necesarias para ser consideradas como cópulas, de acuerdo con sus características, las cópulas pueden ser agrupadas en diferentes categorías¹⁹, siendo estas:

1. *Fundamentales*, se encuentran asociadas con los casos extremos de dependencia como la *comonotonicidad*, *contracomonotonicidad* e *independencia*.
2. *Formas funcionales*, en esta agrupación se identifica las cópulas *explícitas e implícitas*, la primera corresponde aquellas cópulas que pueden ser expresadas a través de una forma funcional cerrada, por ejemplo las cópulas fundamentales; la segunda agrupación corresponde a cópulas que son derivadas de las funciones de distribución multivariadas conocidas, aunque sus formas funcionales no son simples o cerradas, como por ejemplo las cópulas derivadas de las funciones de distribución normal y t multivariada.
3. *Características particulares*, en esta agrupación depende directamente de las características particulares de las cópulas, es posible identificar tres grandes grupos o familias de cópulas siendo las cópulas: *Elípticas*, *Arquimidianas* y *Valor Extremo*.

¹⁹Las cópulas pueden pertenecer a más de una categoría.

3.1.1. Cópulas Fundamentales

En la práctica, el coeficiente de correlación lineal de Pearson es la medida de dependencia más utilizada; sin embargo, como se presentó anteriormente, esta medida presenta ciertos inconvenientes, por lo que es necesario conocer medidas alternativas de dependencia que sean consistentes y confiables para el administrador de riesgo como es el caso de las *Medidas de correlación de rango* y *el coeficiente de dependencia en las colas*, sin embargo, para el mejor entendimiento de estas medidas es necesario disponer de otros conceptos de dependencia como es la *comonotonicidad*, *contramonotonicidad*, *concordancia* y *discordancia*

La *comonotonicidad* también conocida como dependencia perfecta positiva se interpreta como la existencia de una alta probabilidad de que un par de variables aleatorias (X_1, X_2) tome valores altos o bajos al mismo tiempo; análogo a éste concepto se encuentra la *contramonotonicidad* o dependencia perfecta negativa y se refiere a la existencia de una alta probabilidad que en el par de variables aleatorias (X_1, X_2) , X_1 presente valores altos mientras que X_2 presente valores bajos o viceversa. En la Figura 5 se presenta dos variables aleatorias X_1, X_2 comonotónicas (panel izquierdo) y contracomonotónicas (panel derecho) donde claramente se observa la dependencia perfecta positiva y negativa de las variables aleatorias.

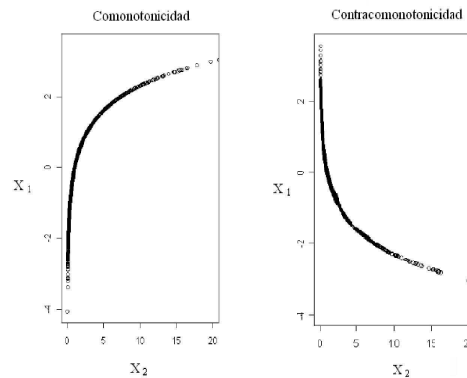


Figura 5: Dispersión de dos variables aleatorias con dependencia perfecta positiva (Panel izquierdo) y negativa (Panel derecho).

Adicional a los conceptos de comonotonicidad y contramonotonicidad se encuentra los conceptos de *concordancia* y *discordancia*, los cuales ofrecen información acerca del signo de la dependencia entre dos variables aleatorias.

De manera informal se puede decir que un par de variables son *concordantes* si "grandes" valores de una variables esta asociado con "grandes" valores de la otra, y "pequeños" valores de la una con "pequeños" valores de la otra variable. La siguiente definición formaliza los conceptos de concordante y discordante de dos variables aleatorias.

Definición 1 (Concordancia y discordancia). *Sean dos observaciones (x_i, y_i) y (x_j, y_j) del vector aleatorio continuo (X, Y) , se dicen que son concordantes, si $x_i < x_j$ y $y_i < y_j$ o si $x_i > x_j$ y $y_i > y_j$. Análogamente, (x_i, y_i) y (x_j, y_j) son discordantes si $x_i < x_j$ y $y_i > y_j$ o si $x_i > x_j$ y $y_i < y_j$. Una formulación alternativa es que (x_i, y_i) y (x_j, y_j) son concordantes, si*

$$(x_i - x_j)(y_i - y_j) > 0,$$

y es discordante si

$$(x_i - x_j)(y_i - y_j) < 0.$$

En este contexto, dos variables aleatorias son concordantes si el sentido de los cambios de una variable tiende a estar asociado con el sentido de los cambios de la otra, es decir que cambios positivos (negativos) de una variable se encuentran asociados con cambios positivos (negativos) de la otra. De forma análoga, dos variables aleatorias son discordantes si cambios positivos (negativos) de una de ellas tiende a estar asociados con cambios negativos (positivos) de la otra. A partir de la definición 1 se puede decir que la *comonotonicidad* y la *contramonotonicidad* son los valores extremos de la concordancia y discordancia de dos variables aleatorias respectivamente. Finalmente, el caso de independencia para un par de variables aleatorias se puede expresar de manera clara y concisa a partir de la siguiente definición.

Definición 2 (Independencia). *Sea un vector aleatorio $X = (X_1, X_2)^t$ con distribución conjunta F y marginales F_1, \dots, F_d , se dice que los componentes de X son mutuamente independientes si y solamente si*

$$F(x) = F_1(x)F_2(x), \text{ para todo } x. \quad (4)$$

Nótese que las anteriores definiciones permiten comprender el grado de dependencia que puede tener un par de variables aleatorias, y en este sentido es necesario definir ciertas cópulas que permita realizar una análisis inicial de dependencia de un sistema de d variables aleatorias, éstas cópulas son llamadas cópulas fundamentales, mismas que pueden corresponde a la cópula producto y los límites de Fréchet.

La *cópula producto*, permite identificar un sistema de d variables aleatorias independientes para lo cual combina el teorema de Sklar con la función multivariada producto o independiente dando como resultado la siguiente cópula:

$$C^{ind}(x_1, \dots, x_d) = \prod_{i=1}^d x_i$$

Una manera sencilla de presentar la estructura de dependencia de una cópula es a través de la simulación, en la Figura 6 se presenta la dispersión de dos variables aleatorias uniformes estándar con una distribución multivariada igual a la cópula producto.

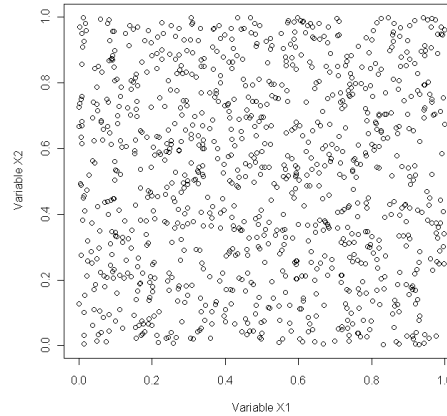


Figura 6: Simulación de 1000 datos de una cópula bivariada independiente.

Los *límites de Fréchet*, permiten identificar los límites de dependencia que puede tener un sistema de d variables aleatorias, y para el caso de una función de distribución conjunta bivariada, los límites de la función de distribución se denota por $M(x_1, x_2) = \min(x_1, x_2)$ y $W(x_1, x_2) = \max(x_1 + x_2 - 1, 0)$ que corresponden a los límites superior e inferior respectivamente. De tal manera que los límites de Fréchet de una cópula C bivariada son:

$$W(x_1, x_2) \leq C \leq M(x_1, x_2)$$

En la Figura 7 se presenta las dispersiones de las distribuciones de los

límites de Fréchet, donde se puede observar que el límite superior de Fréchet corresponde al caso de dependencia perfecta positiva o comonotonicidad y el límite inferior de Fréchet corresponde a la dependencia perfecta negativa o contracomonotonicidad.

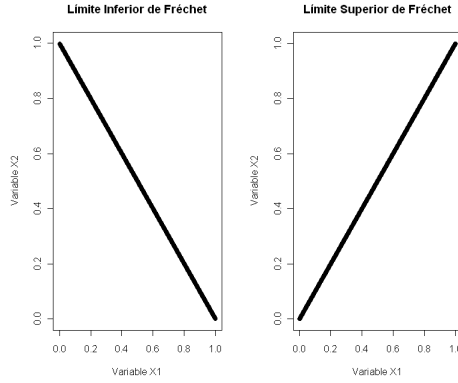


Figura 7: 10000 datos simulados de los límites de Fréchet

3.1.2. Familias de Cópulas

Cópulas Elípticas Las distribuciones elípticas juegan un papel importante en finanzas, debido a que constituye una fuente de distribuciones multivariantes que poseen muchas de las buenas propiedades de la distribución normal multivariante y facilitan la obtención de modelos multivariantes para extremos y otras formas de dependencia no normales. Las cópulas elípticas no son más que las cópulas de distribuciones elípticas por lo que las curvas de nivel de las variables aleatorias que tengan este tipo de cópulas forman elipses. Las dos cópulas más importantes de esta familia de cópulas son la cópula normal (o Gaussiana) y la cópula t de student, las cuales se derivan de las funciones de distribución multivariada que poseen estos mismos nombres. La simulación a partir de este tipo de distribuciones es sencilla y, como consecuencia del teorema de Sklar, también lo es a partir de cópulas elípticas. Además permiten calcular fácilmente los coeficientes de correlación de rangos y dependencia en colas.

Definición 3. Sea X un vector aleatorio n dimensional, $\mu \in \mathbb{R}$ y Σ una matriz simétrica de dimensión $n \times n$ y definida no negativa. Se dice que X tiene una

distribución elíptica de parámetros μ , Σ y ϕ si la función característica de X es de la forma:

$$\varphi_{X\mu}(t) = \phi(t^T \Sigma t)$$

Un vector que sigue una distribución elíptica se lo denota por $X \sim E_n(\mu, \Sigma, \phi)$ y ϕ recibe el nombre de *generador característico*. Si $X \sim E_n(\mu, \Sigma, \phi)$, donde Σ es una matriz diagonal, entonces X tiene componentes no correlacionadas (si $0 \leq V(X_i) \leq +\infty$). La distribución normal multivariada es la única entre las distribuciones elípticas en la que componentes no correlacionadas implica componentes independientes.

Definición 4. Sea R una matriz simétrica, definida positiva y Φ_R^n la función de distribución normal multivariante estandarizada. La cópula gaussiana se define como:

$$C_R(u_1, \dots, u_n) = \Phi_R^n(\phi^1(u_1), \dots, \phi^1(u_n)) \quad (5)$$

$$= \dots \int_{-\infty}^{\phi^1(u_n)} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}} |R|^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2} x^T P^1 x\right) dx_1 \dots dx_n \quad (6)$$

donde ϕ^1 es la función de distribución inversa de la distribución normal estándar.

Las cópulas gaussianas no tienen dependencia en las colas y ha sido la única utilizable durante mucho tiempo; de hecho la metodología RiskMetricsTM la usa hace varios años en gestión de riesgos de carteras mediante simulaciones Monte Carlo.

Existe otra cópula dentro de la familia elíptica que reviste interés, es la llamada cópula t de student, donde se supone que X tiene una representación estocástica de la siguiente manera:

$$X =_d \mu + \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{S}} Z$$

donde $\mu \in \mathbb{R}$, $S \sim \chi_v^2$ y $Z \sim N_n(0, \Sigma)$ son independientes, entonces X tiene una distribución t de Student n variante de media μ y v grados de libertad. Su matriz de covarianza es $\frac{v}{v-2} \Sigma$ (para $v > 2$). Si $v \leq 2$ entonces $Cov(X)$ no está definida. En este caso se interpreta Σ como el parámetro de forma de la

distribución de X .

Definición 5. Sea R una matriz simétrica, definida positiva y X el vector aleatorio definido anteriormente. La cópula t de Student Multivariada se define como:

$$C_{v,R}^t(u_1, \dots, u_n) = t_{v,R}^n(t_v^1(u_1), \dots, t_v^1(u_n)) \quad (7)$$

$$= \dots \int_{-\infty}^{t_v^1(u_n)} \frac{\Gamma(\frac{v+d}{2}) |R|}{\Gamma(\frac{v}{2}) (v\pi)^{\frac{d}{2}}} \exp\left(1 + \frac{1}{v} x^T P^1 x\right)^{\frac{v+d}{2}} dx_1 \dots dx_n \quad (8)$$

donde

$$R_{ij} = \frac{\Sigma_{ij}}{\sqrt{\Sigma_{ii}\Sigma_{jj}}} \text{ para todo } i, j \in \{1, \dots, n\}$$

y $t_{v,R}^n$ denota la función de distribución t de Student multivariada de $\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{S}}Y$ con $S \sim \chi^2$ e $Y \sim N_n(0, R)$ independientes, con matriz de correlación R y v grados de libertad y t_v^1 es la función de distribución inversa asociada a la distribución t univariada con v grados de libertad. Las cópulas elípticas resultan atractivas en el mundo financiero, ya que en portafolios conformados por factores de riesgo que sigan una distribución elíptica se satisface las condiciones que garantizan la subaditividad del valor en riesgo (VaR) y el principio de diversificación, de tal forma que la optimización del portafolio resulta apropiada.

Se puede apreciar que las ecuaciones (6) y (8) se encuentran definidas en términos de las funciones de distribución inversas de ϕ^{-1} y t_v^{-1} , estas se evalúan en las variables $u_i = F_i(r_i)$ con $i = 1, \dots, n$, donde F_i corresponde a una función de distribución arbitraria, de aquí las variables aleatorias cuyas estructura de dependencia este descrita por una cópula Gaussiana o una t de Student puede describir comportamientos marginales diferentes. Las distribuciones derivadas de esta manera son conocidas como *meta-distribuciones* y pueden ser pensadas como una generalización de las distribuciones multivariadas tradicionales. Por ejemplo, una distribución meta-Gaussiana sería aquella cuyo comportamiento multivariado es descrita por una cópula Gaussiana pero al menos una de las distribuciones marginales sea diferente de la distribución normal.

En la parte superior de la Figura 8 se presenta la densidad de la distribución *meta-t de Student* con 5 grados de libertad y marginales Weibull y en la parte inferior corresponde la densidad multivariada de dos variables aleatorias que tienen una cópula gaussiana y funciones de distribución marginales

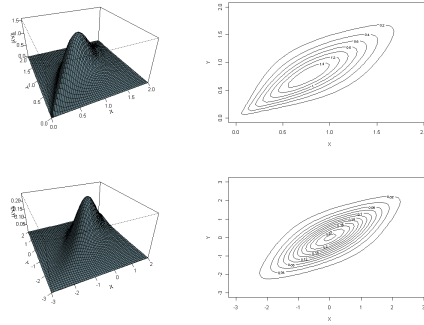


Figura 8: Superficies y funciones de densidades asociadas a dos distribuciones elípticas bivariadas

normal estándar, en ambos casos la correlación es del 70%. Claramente se observa que las gráficas de contorno tienen formas elípticas con la característica que la primera distribución presenta dependencia en la cola inferior por lo que las *meta-distribuciones* permiten incorporar ciertas estructuras específicas de dependencias que permite describir el comportamiento multivariado de las variables aleatorias.

Cóputas Arquimidianas Un particular grupo de cóputas que han probado ser útiles en una gran cantidad de modelos empíricos es la llamada clase Arquimidiana. Las cóputas Arquimidianas permiten capturar una gran variedad de estructuras de dependencia. Como se verá más adelante, la representación arquimidiana de cóputas permite reducir al estudio de una cóputa multivariante a una única función univariante.

Se considera una clase Φ de funciones $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, \infty]$ cuyas derivadas son continuas sobre $(0, 1)$ con las propiedades que $\varphi(1) = 0$, $\varphi'(t) < 0$ (decreciente) y $\varphi''(t) > 0$ (convexo) para todo $0 < t < 1$, es decir $\varphi(t)$ es una función convexa decreciente. Además si $\varphi(0) = \infty$ entonces se garantiza que la inversa (φ^{-1}) existe.

Alguna función que tenga estas propiedades es capaz de generar una función de distribución bivariada, de tal forma que φ recibe el nombre de *función generadora*.

Si $\varphi(0) < \infty$, la función generadora no es estricta por lo que existe su seudo inverso, en este caso la cópula toma la forma de $C(u_1, u_2) = \max[(\cdot), 0]$; por ejemplo, se considera la función generadora $\varphi(t) = (1 - t)^\theta$, $\theta \in [1, \infty)$, esto genera la cópula $C(u_1, u_2) = \max[1 - [(1 - u_1)^\theta + (1 - u_2)^\theta]^{1/\theta}, 0]$.

La inversa del generador se escribe como φ^{-1} y su seudo inversa se escribe como $\varphi^{[-1]}$, donde la definición formal de seudo inversa es la siguiente:

$$\varphi^{[-1]}(t) = \begin{cases} \varphi^{-1}(t) & 0 \leq t \leq \varphi(0) \\ 0 & \varphi(t) \leq t \leq +\infty \end{cases}$$

y

$$\varphi^{[1]}(\varphi(t)) = t$$

Definición 6. Se dice que una cópula C es arquimidiana si es de la forma:

$$C(u_1, \dots, u_n) = \begin{cases} \varphi^1(\varphi(u_1) + \dots + \varphi(u_n)) & \text{si } \sum_{i=1}^n \varphi(u_i) \leq \varphi(0) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (9)$$

$\varphi(u)$ se denomina *generador de la cópula*. Si $\varphi(0) = \infty$, decimos que φ es un *generador estricto* por lo que su inverso siempre existe (dado que un gran número de resultados requiere que φ tenga inversa en $(0, \infty)$, solamente consideramos generadores estrictos).

Las cópulas arquimidianas son una familia de funciones muy numerosa, la mayoría de cópulas que pertenece a esta familia son funciones de uno o dos parámetros, lo que si bien permite representar fácilmente diferentes tipos de dependencias, también implica una de sus mayores limitaciones, ya que resulta complicado describir relaciones de dependencia complejas con un número reducido de parámetros, en especial en dimensiones altas [Nelsen, 2006]. A continuación, se mencionan tres de las cópulas Arquimidianas más relevantes.

Cópula Clayton. También conocida como la cópula de Cook y Johnson, originalmente estudiada por Kimeldorf y Sampson (1975), toma la siguiente forma:

$$C^{Cl}(u_1, \dots, u_d) = (u_1^{-\theta} + \dots + u_d^{-\theta} - d + 1)^{\frac{1}{\theta}}$$

donde el generador de esta familia es $\phi(t) = \frac{1}{\theta}(t^{-\theta} - 1)$ con $\theta > 0$, cuando θ se aproxima a cero los marginales son independientes y cuando se aproxima al infinito la cópula se aproxima al límite superior de Fréchet.

La cópula de Clayton no permite cuantificar la dependencia negativa, por lo que le convierte adecuada para medir la dependencia entre índices de riesgos (mercado, crédito, liquidez y operacional) ya que presentan una alta dependencia en la cola inferior y una baja dependencia en la cola superior de la distribución multivariada.

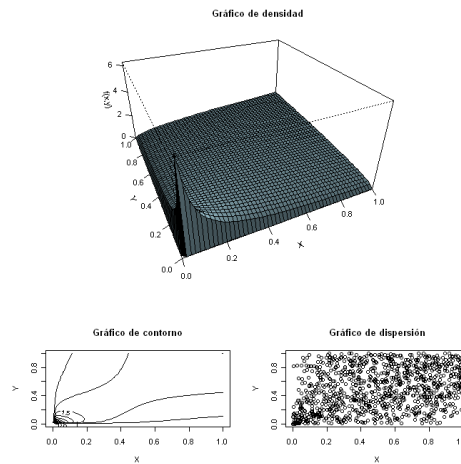


Figura 9: Gráfico de densidad, contorno y dispersión de una cópula biviada de Clayton con parámetro 0.5.

Por ejemplo, en la Figura 9 se presenta los gráficos de una cópula biviada Arquimidiana de Clayton cuyos *valores extremos* de la cola inferior y superior son 0.25 y 0 respectivamente y cuya correlación de Kendall es del 20%, en estas gráficas se identifica la alta dependencia que tiene la cópula de Clayton en la cola inferior.

Cópula Frank El generador de la cópula de Frank (1979) está definido por $\phi(t) = -\log\left(\frac{\exp(-\theta t)-1}{\exp(-\theta)-1}\right)$, donde el valor del parámetro puede encontrarse entre $(-\infty, \infty)$, y la cópula asociada a este generador toma la siguiente forma:

$$C^{Fr}(u_1, \dots, u_d) = -\frac{1}{\theta} \log \left[1 + \frac{\prod_{i=1}^d (e^{-\theta u_i} - 1)}{(e^{-\theta} - 1)^{d-1}} \right]$$

Hay que tomar en cuenta que valores de $-\infty, 0$ y ∞ corresponde al límite inferior de Fréchet, independencia y al límite superior de Fréchet respectivamente. La cópula de Frank es muy popular por varias razones, siendo estas:

1. Permite cuantificar dependencia negativa entre marginales
2. La dependencia en las colas de la distribución es simétrica como la cópula Gaussiana y la de t de Student
3. Es completa en el sentido en que ésta cópula toma en cuenta los límites de Fréchet, lo que significa que puede cuantificar una amplia gama de dependencias que pueden ir desde la dependencia perfecta negativa hasta la dependencia perfecta positiva

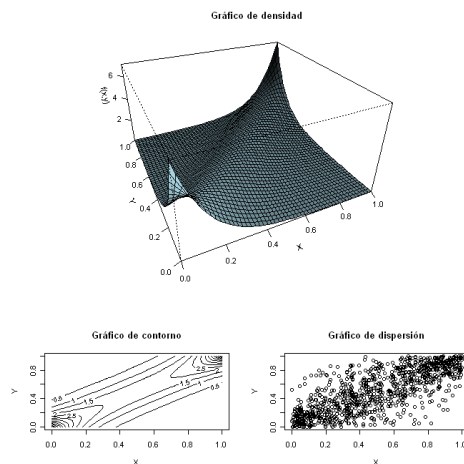


Figura 10: Gráfico de densidad, contorno y dispersión de una cópula de Frank con parámetro 3.

De tal manera que la cópula de Frank puede ser usada para modelar distribuciones que presenten fuerte dependencia positiva o negativa, sin embargo

a partir de estudios realizados por Mester y Mackay (1994), se determinó que la dependencia en las colas de cópula de Frank tienden a ser más débiles que de la cópula Gaussiana, por lo que se llegó a la conclusión que la cópula de Frank es adecuado en casos donde la distribución multivariada tiene débil dependencia en las colas.

En la Figura 10 se presenta los gráficos de una cópula bivariada arquimadiana de Frank donde los valores en la cola superior e inferior son 0 y la correlación de Kendall y Spearman son 0.56 y 0.76 respectivamente. En este tipo de cópula se observa que la dependencia en las colas es débil pero se tiene una alta dependencia en la parte central de la distribución.

Cópula de Gumbel También conocida como cópula de Gumbel-Hougaard, su generador está definido por $\phi(t) = (-\log(t))^\theta$ con $\theta > 1$. En este caso la cópula de Gumbel toma la forma:

$$C^{Gu}(u_1, \dots, u_d) = \exp\left(-(\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_d)^{1/\theta}\right)$$

donde $\tilde{u}_j = \log(u_j)$. Cuando el parámetro de dependencia toma valores de 1 y ∞ , la cópula de Gumbel corresponde a la cópula independiente y al límite superior de Fréchet respectivamente. Al igual que la cópula de Clayton, la cópula de Gumbel no permite cuantificar dependencia negativa pero contrariamente a Clayton esta presenta alta dependencia en la cola superior de la distribución y débil dependencia en la cola inferior.

En la Figura 11 se presenta los gráficos de una cópula bivariada arquimadiana de Gumbel donde los valores en la cola superior e inferior son 0.41 y 0; además que la correlación de Kendall y Spearman es 0.33 y 0.47 respectivamente, en este tipo de cópula se observa que la dependencia en la cola superior es alta.

De manera general se puede decir que todas estas cópulas arquimidias, describen tipos de dependencia completamente diferentes, por ejemplo, la cópula de Clayton exhibe dependencia en la cola inferior mientras que la de Gumbel exhibe dependencia en la cola contraria y finalmente la cópula de Frank no presenta dependencia en las colas sin embargo su alta dependencia se mantiene en el centro de la distribución multivariada.

En el Cuadro (1) se observa como la correlación de τ de Kendall se encuentra en función del parámetro de la cópula, esta propiedad permite estimar los

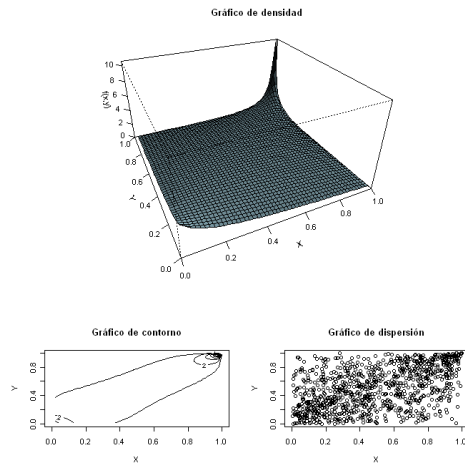


Figura 11: Gráfico de densidad, contorno y dispersión de una cópula bivariada de Gumbel con parámetro 1.5.

Cópula	τ de Kendall	λ_u	λ_l
Clayton	$\frac{\theta}{\theta+2}$	0	$2^{-1/\theta}$
Frank	$1 - \frac{4}{\theta} \left[1 - \frac{1}{\theta} \int_0^t \frac{t}{\exp(t)-1} dt \right]$	0	0
Gumbel	$\frac{(2+\theta)\delta-2}{(2+\theta)\delta}$	$2-2^{1/\theta}$	0

Cuadro 1: Coeficiente de Kendall y dependencia en las colas para algunas cópulas Arquimidianas

parámetros de la cópula a partir del método de momentos.

Cópulas Valor Extremo En un portafolio de activos, donde la distribución conjunta presenta mayor dependencia en la cola izquierda esta resulta ser un portafolio de mayor riesgo, ya que a medida que se observen pérdidas muy grandes en un activo, es probable que también suceda lo mismo en el otro, tal como se observa en la Figura 12 donde se exhiben cuatro diferentes estructuras de dependencia entre los retornos de dos activos financieros. De lo anterior, se aprecia que en finanzas es de interés medir ciertas características de una distribución multivariada como los eventos extremos de las series, donde estas

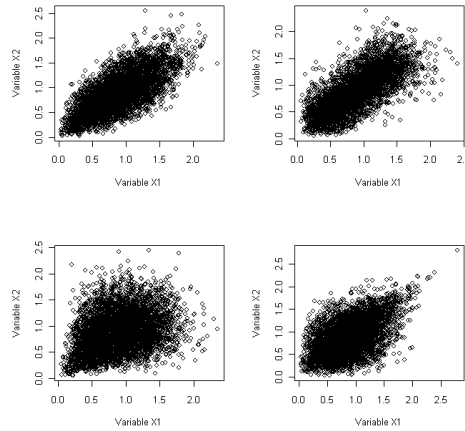


Figura 12: Simulación de 5000 realizaciones de dos variables aleatorias normal estándar con cuatro diferentes estructuras de dependencia.

pueden ser aproximadas a partir de medidas específicas que se desprenden de la cópula tales como el coeficiente de dependencia en las colas; sin embargo, esta es una medida asintótica, y no ofrece mayor información acerca del comportamiento probabilístico de las observaciones extremas.

Al igual que en el caso univariado, existen distribuciones multivariadas límites que describen el comportamiento de la distribución conjunta de los extremos de las series de estudio, que a su vez están asociadas a cópulas que pertenece a la familia de valores extremos.

La teoría del valor extremo en el caso univariado se concentra en resultados asintóticos de la distribución límite hacia la cual converge la distribución del valor máximo de una variable aleatoria. El teorema de Fisher y Tippett [1928] y Gnedenko [1943], indica que el máximo de una variable aleatoria puede ser estabilizado a través de secuencias de parámetros de localización y escala, de tal manera que converja en distribución a una *distribución generalizada de valor extremo* (GEV) $H_\varepsilon(x)$, la cual viene de la forma:

$$H_\varepsilon(x) = \begin{cases} \exp(-(1 + \varepsilon x)^{-1/\varepsilon}) & \text{si } \varepsilon \neq 0 \\ \exp(-e^{-x}) & \text{si } \varepsilon = 0 \end{cases}$$

Una metodología fácil de implementar es la de *máximos por bloques*, en la cual se identifican los valores extremos como los eventos que tengan el valor

más alto durante un período de tiempo específico.

Otra forma de analizar el comportamiento de los valores extremos es a partir de la cola de distribución de la variable aleatoria. En esta aproximación el teorema de Balkema y de Haan [1974] y Pickands [1975], indica que para aquellas distribuciones en las que sus máximos muestrales convergen en distribución a la distribución GEV, la distribución de excesos sobre umbral converge a una *distribución generalizada de pareto (GPD)* $G_{\varepsilon,\beta}(x)$, la cual es de la forma:

$$G_{\varepsilon,\beta}(x) = \begin{cases} 1 - (1 + \varepsilon x/\beta)^{-1/\varepsilon} & \text{si } \varepsilon \neq 0 \\ 1 - \exp(-x/\beta) & \text{si } \varepsilon = 0 \end{cases}$$

Dado que en este se desea aproximar el comportamiento de la cola de la distribución a través de una GDP, la forma de seleccionar los valores extremos es a través del método de *picos sobre umbral (POT)*.

Al igual que en el caso univariado, la teoría de valores extremos multivariada (*MEVT*) muestra el comportamiento asintótico de la distribución del Máximo M_n de una familia de vectores aleatorios $\{X_i\}_{i \in [1,n]}$ donde $X_i \in \mathbb{R}^d$. En este caso M_n corresponderá al vector de máximos de los d componentes de $\{X_i\}_{i \in [1,n]}$. En el *MEVT* se busca la distribución límite de los máximos normalizados a través de vectores de parámetros de localización ($b_n \in \mathbb{R}^d$) y escala ($c_n \in \mathbb{R}^d$, $c_n > 0$), tal que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{M_n - b_n}{c_n} \leq x\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} F^n(c_n x + b_n) = H(x) \quad (10)$$

si la relación (10) se mantiene, entonces se dice que la función de distribución F pertenece al dominio de atracción en los máximos de H , donde H corresponderá a una función de distribución multivariada de valor extremo. En la *MEVT* la distribución límite es una familia de distribuciones multivariadas, la cual puede ser aproximada por una familia de cópulas.

A partir de la relación (10) y con la definición (1) de Sklar se tiene que:

$$H(x) = C_0(\tilde{F}_1(x_1), \dots, \tilde{F}_d(x_d)) \quad (11)$$

donde $\tilde{F}_1(x_1), \dots, \tilde{F}_d(x_d)$ son las funciones de distribución de los máximos de cada uno de los componentes de la familia de vectores aleatorios $\{X_i\}_{i \in [1,n]}$, por lo que de acuerdo con el teorema de Fisher y Tippet [1928] y Hnedenko [1943] cada una de estas converge en distribución a una distribución GEV.

A partir de estos resultados, es posible definir el dominio de atracción de los máximos en términos de la cópula, tal como se muestra en el siguiente teorema [McNeil, 2005].

Teorema 2. *Sea $F(r) = C(F_1(r_1), \dots, F_n(r_d))$, para funciones marginales continuas F_1, \dots, F_d y alguna cópula C . Adicionalmente, sea $H(r)$ una distribución MEV tal que satisface (11) para alguna cópula C_0 . Se dice que F pertenece al dominio de atracción en los máximos de H , si y solo si F_i pertenece al dominio de atracción en los máximos de la distribución GEV, con $i=1, \dots, d$ y si además se satisface la siguiente condición:*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} C^t(u^{1/t}) = C_0(u), \quad u \in [0, 1]^d \quad (12)$$

El teorema anterior implica que la cópula límite C_0 se encuentra únicamente determinada por la cópula C . En los casos donde la condición (12) se mantiene, se dice que la cópula C pertenece al dominio de atracción de los máximos de la cópula C_0 . La familia de cópulas límite que cumple esta condición se denomina valor extremo, la que satisface la siguiente propiedad:

$$C(\mathbf{u}^t) = C^t(\mathbf{u}), \quad \text{para todo } t > 0$$

donde $\mathbf{u} = [u_1, \dots, u_d]'$ con $u_i = \tilde{F}_i(x_i)$. Una forma de representar esta familia de cópulas para el caso bivariado es mediante la siguiente expresión:

$$C(u_1, u_2) = \exp \left[\log(u_1 u_2) A \left(\frac{\log(u_1)}{\log(u_1 u_2)} \right) \right]$$

donde $A(\cdot) : [0, 1] \rightarrow [\frac{1}{2}, 1]$, conocida como la función de dependencia, es una función convexa tal que $\max(w, 1 - w) \leq A(w) \leq 1$ para todo $w \in [0, 1]$. Algunas de las cópulas más importantes, tales como la de independencia y la de comonotonicidad, hacen parte de esta familia, junto con otras cópulas versátiles como la Gumbel y Galambos.

4. Modelos de variables latentes, mixtura y concentración

4.1. Modelos de variables latentes

Esta metodología se utiliza para modelar la pérdida de un portafolio de crédito donde se generaliza los modelos que descienden del modelo de valo-

ración de activos de Merton (1974) también conocidos como los modelos estructurales, donde el incumplimiento de una *empresa* i se presenta cuando una *variable latente* cae por debajo de algún umbral para un intervalo de tiempo $[0, T]$. Dentro de esta metodología se puede considerar a los principales modelos industriales de crédito que son desarrollados por la corporación KMV y CreditMetricsTM. La dependencia entre los eventos de incumplimiento es causado por la dependencia entre las variables latentes, donde la matriz de correlación de las variables latentes se la calibra a partir del desarrollo de modelos factoriales que relaciona cambios del valor de los activos con cambios en un pequeño número de factores económicos.

La principal suposición de los modelos KMV y CreditMetricsTM es que las variables latentes siguen una distribución normal multivariada; sin embargo, no existe una razón convincente para considerar que los activos de una empresa sigan esta distribución.

Para la explicación de esta metodología es necesario empezar definiendo de manera general el modelo por umbrales lo que permitirá comprender la relación directa que tiene este modelo con la función cópula.

Definición 7. Sea $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_m)'$ un vector aleatorio m dimensional y sea $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ una matriz determinística con elementos d_{ij} tal que para todo i , los elementos de la i -ésima fila forman un conjunto de umbrales crecientes que satisface la condición $d_{i1} < \dots < d_{in}$, donde a estos umbrales se les complementa con dos umbrales extremos $d_{i0} = -\infty$ y $d_{i(n+1)} = \infty$ para todos los m deudores, de tal manera que es posible generar un conjunto de variables $S_{i \in \{0, \dots, m\}}$ de la siguiente forma:

$$S_i = j \iff d_{ij} \leq X_i \leq d_{i(j+1)}, \quad j \in \{0, \dots, n\}, \quad i \in \{0, \dots, m\}.$$

Luego al par (\mathbf{X}, \mathbf{D}) se dice que define un modelo de umbrales para el vector de estados $\mathbf{S} = (S_1, \dots, S_m)$.

Es necesario recalcar que el vector \mathbf{X} contiene las variables críticas de las m empresas que conforman el portafolio, las distribuciones marginales se denotan por $F_i(x) = P(X_i < x)$, y la fila i de la matriz \mathbf{D} corresponde a los umbrales críticos de la *empresa* i . Por definición, el incumplimiento ocurre cuando $X_i \leq d_{i1}$ de tal manera que la probabilidad de incumplimiento de la empresa i se encuentra dada por $\bar{p}_i = F_i(d_{i1})$.

En el modelo KMV la variable latente X_i se supone que sigue una distribución Gaussiana Multivariada y se interpreta como el cambio relativo del valor de los activos de una empresa, para determinar el valor de los umbrales D_i

se utiliza la técnica de valoración de opciones sobre los valores históricos de la empresa y las correlaciones entre los retornos de los activos se las calibra a partir del supuesto de que el retorno de los activos siguen un modelo factorial, donde los factores se consideran a variables macroeconómicas.

4.2. Modelos de Mixtura

Un portafolio de crédito se puede considerar de manera general como una colección de m contratos o créditos que pueden presentar dos posibles escenarios: incumplir o pagar lo pactado. Para medir los posibles escenarios que puede presentar un crédito, se define una variable Y de la siguiente manera:

$$Y_i = \begin{cases} 1 & \text{si incumple} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (13)$$

así, el número de créditos incumplidos M que puede presentar un portafolio en un horizonte de tiempo T es:

$$M = \sum_{i=1}^m Y_i.$$

Si se supone que los créditos del portafolio son independientes de probabilidad de incumplimiento igual a un valor fijo p entonces se puede considerar a cada crédito como un experimento de *Bernoulli* de parámetro p de tal manera que el número de incumplimientos del portafolio sigue una distribución binomial de parámetro m y p , $M \sim B(m, p)$.

En estadística el supuesto de independencia facilita el desarrollo de modelos; por ejemplo, la ley de los grandes números y el teorema de límite central son obtenidos a partir del supuesto de independencia entre las variables aleatorias, por lo que si se supone que los créditos de un portafolio son independientes entre ellos y por el teorema de límite central se tendría que el número de incumplidos se comporta como una variable gaussiana siempre y cuando el tamaño del portafolio de crédito sea grande. En este sentido no es necesario utilizar la simulación de Monte Carlo para determinar la distribución de los incumplidos de un portafolio ya que se puede expresar de forma cerrada donde las propiedades de esta distribución son conocidas. Desafortunadamente, este supuesto no es realista para portafolios crediticios dando como resultado índices de riesgo inadecuados, en este sentido es necesario desarrollar aproximaciones más realistas para el número de incumplimiento de un portafolio y por ende de la pérdida total.

En los modelos de mixtura, la idea básica para modelar dependencia es considerar que el incumplimiento de un deudor (p) depende de un conjunto de factores económicos tales como las variables macroeconómicas las que son modeladas estocásticamente; así, la dependencia entre incumplimientos se la obtiene de la dependencia que tiene cada incumplimiento con el mismo conjunto de factores económicos. Los modelos de mixtura se los puede dividir en los modelos de Bernoulli y de Poisson cuyas definiciones se presentan a continuación.

Definición 8 (Modelo de mixtura Bernoulli). *Dado un $p < m$ y un vector aleatorio p -dimensional $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_p)'$, el vector $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_m)'$ sigue un modelo mixto de Bernoulli con vector de factores Ψ si existen funciones $p_i : \mathbb{R}^p \rightarrow [0, 1]$, $1 \leq i \leq m$, de tal manera que los componentes de \mathbf{Y} condicionados a $\Psi = \omega$ son variables aleatorias independientes con distribución Bernoulli de parámetro $P(Y_i = 1 \mid \Psi = \omega) = p_i(\omega)$.*

Si se dispone de una vector de créditos $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m)'$ en $\{0, 1\}^m$ y a partir de la definición (8) se tiene que la distribución conjunta condicional de los incumplimientos del portafolio de tamaño m al vector de factores Ψ es de la siguiente manera:

$$P(Y = y \mid \Psi) = \prod_{i=1}^m Q_i(\Psi)^{y_i} (1 - Q_i(\Psi))^{1-y_i}, \quad (14)$$

de lo anterior la distribución incondicional de los incumplimientos de Y se la obtiene integrando la ecuación (14) sobre la distribución del vector de factores Ψ :

$$P(Y = y) = \int \prod_{i=1}^m Q_i(\Psi)^{y_i} (1 - Q_i(\Psi))^{1-y_i} dF(Q_1, \dots, Q_m) \quad (15)$$

De la ecuación (15) se observa que la distribución de incumplimientos queda completamente especificada por la estructura de dependencia de la distribución de las probabilidades de incumplimientos de los créditos y de manera particular se tiene que la probabilidad de incumplimiento de un crédito i dado por $\bar{p}_i = P(Y_i = 1) = E(p_i(\Psi))$.

A partir de la definición (8) se puede observar que el modelo de *Credit Risk*⁺ puede ser representado como un *modelo de mixtura Bernoulli* donde la distribución del incumplimiento esta dado por:

$$P(Y_i = 1 | \Psi) = Q_i(\Psi)$$

$$Q_i(\Psi) = 1 - \exp(-\mathbf{w}_i' \Psi)$$

donde $\Psi = (\omega_1, \dots, \omega_p)'$ es un vector p -dimensional de factores macroeconómicos cuyos elementos son independientes y siguen una distribución gamma, con $p < m$ y $\mathbf{w}_i = (w_{i,1}, \dots, w_{i,p})'$ es el vector positivo de pesos de los factores macroeconómicos.

Dado que el incumplimiento de un crédito es un evento poco frecuente se analiza la opción de aproximar una variable aleatoria de Bernoulli a partir de variables aleatorias de Poisson dando origen a los modelos de mixtura de Poisson, en este modelo es permitido que un crédito incumpla más de una vez en un horizonte de tiempo con la característica que la probabilidad que ocurra este evento es baja; la notación que se utiliza para determinar este evento es $\tilde{Y}_i \in \{0, 1, 2, \dots\}$ y representa el número de incumplimientos que puede presentar un crédito en un horizonte de tiempo fijo.

Definición 9 (Modelo de Mixtura Poisson). *Dado p y Ψ como en la definición (8), el vector $\tilde{Y} = (\tilde{Y}_1, \dots, \tilde{Y}_m)'$ sigue un modelo de mixtura de Poisson con factores Ψ si existe funciones $\lambda_i = \mathbb{R}^p \rightarrow (0, \infty)$, $1 \leq i \leq m$, de tal manera que los componentes de \tilde{Y} condicionados a $\Psi = \omega$ son variables aleatorias independientes con distribución de Poisson de parámetro $\lambda_i(\omega)$*

4.3. Relación entre el Modelo de variables latentes y Mixtura

A primera vista, los modelos de variables latentes y los modelos de mixtura Bernoulli aparentan ser modelos muy diferentes; sin embargo, como ha mencionado Gordy (2000), estas diferencias son solamente de presentación e interpretación ya que matemáticamente son equivalentes; por ejemplo, Gordy demuestra que los modelos del tipo CreditMetricsTM y KMV pueden ser escritos como modelos de mixtura Bernoulli siempre y cuando el retorno de los activos puedan expresarse a partir de un modelo factorial. A continuación se generaliza el estudio realizado por Gordy; de tal manera que se desarrolla la teoría que permite relacionar los modelos de variables latentes y los modelos de mixtura logrando facilitar la aplicación de técnicas estadísticas para resolver y calibrar los modelos de riesgo de crédito; por ejemplo, se determina que la distribución del número de incumplimientos en CreditMetricsTM puede obtenerse mucho más rápido si este modelo es expresado como un modelo tipo mixtura.

Las siguientes condiciones garantizan que un modelo de variables latentes puede ser expresado como un modelo de mixtura Bernoulli.

Definición 10. Una variable aleatoria \mathbf{X} presenta una estructura de independencia de dimensión p condicional a ω siempre y cuando existe un $p < m$ y un vector aleatorio p dimensional $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_p)$ de tal manera que los componentes del vector aleatorio $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_m)$ condicionado a ω son independientes.

Lema 1. Sea (\mathbf{X}, \mathbf{D}) un modelo de umbrales para un vector aleatorio m dimensional \mathbf{X} . Si \mathbf{X} presenta una estructura de independencia de dimensión p condicional a ω luego el indicador $Y_i = I_{\{X_i \leq d_{i1}\}}$ sigue un modelo mixto Bernoulli con factor ω , donde la probabilidad de incumplimiento condicional está dada por:

$$p_i(\omega) = P(X_i \leq d_{i1} \mid \omega)$$

Una de las principales herramientas utilizadas para la implementación de los modelos comerciales de variables latentes es el modelo factorial, que permite especificar el comportamiento de los retornos de los activos (por ejemplo, en CreditMetricsTM y KMV) a partir de ciertas variables exógenas, logrando determinar la distribución de pérdida del portafolio de crédito. De manera general, se puede decir que la estructura del vector aleatorio $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_m)$ que es parte de un modelo por umbrales (\mathbf{X}, \mathbf{D}) , presenta una estructura de la familia normal mixta, es decir:

$$\mathbf{X} = \mu(W) + g(W)Z \tag{16}$$

donde W y Z son independientes y $Z_i = \sum_{j=1}^p a_{i,j}\theta_j + \sigma_i\varepsilon_i$ tiene una representación factorial, donde el vector aleatorio $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_p) \sim N_p(0, \Omega)$ es independiente de las variables aleatorias $\varepsilon_{i \in \{1, \dots, p\}}$ que son independientes e idénticamente distribuidas con distribución normal estándar. De lo anterior, se observa que \mathbf{X} está condicionado al comportamiento del vector $\omega = (\theta_1, \dots, \theta_p, W)$ de dimensión $(p+1)$ y por la definición (10), $X_{i \in \{1, \dots, m\}}$ es independiente y normalmente distribuida con media $\mu_i(W) + g(W)\sum_{j=1}^p a_{i,j}\theta_j$ y varianza $(g(W)\sigma_i)^2$; a partir del Lema (1) se tiene que el modelo por umbrales (\mathbf{X}, \mathbf{D}) presenta una

probabilidad de incumplimiento condicional igual a:

$$\begin{aligned}
 Q_i(\omega) &= P(X_i < D_0^i \mid \omega) \\
 Q_i(\omega) &= P\left(\mu_i(W) + g(W) \left(\sum_{j=1}^p a_{i,j} \theta_j + \sigma_i \varepsilon_i\right) < D_0^i \mid \omega\right) \\
 Q_i(\omega) &= P\left(\varepsilon_i < \frac{D_0^i - \mu_i(W) - g(W) \sum_{j=1}^p a_{i,j} \theta_j}{g(W) \sigma_i} \mid \omega\right) \\
 Q_i(\omega) &= \Phi\left(\frac{D_0^i - \mu_i(W) - g(W) \sum_{j=1}^p a_{i,j} \theta_j}{g(W) \sigma_i}\right)
 \end{aligned} \tag{17}$$

dando como resultado un modelo equivalente mixto Bernoulli con probabilidad de incumplimiento condicional igual a $Q_i(\omega)$ donde la distribución binomial mixta del número de incumplimiento esta expresado de la siguiente manera:

$$P(Y = y \mid \omega) = \prod_{i=1}^m Q_i(\omega)^{y_i} (1 - Q_i(\omega))^{1-y_i}. \tag{18}$$

4.4. Modelo de Concentración

El modelo de concentración analizado en esta sección es conocido como modelo de “*Capitalización y Riesgo de Crédito*” (*CyRCE*)²⁰, es una buena alternativa para mercados emergentes en donde la problemática está definida alrededor de la limitación en la información; además de que es una herramienta que brinda apoyo en la administración de riesgos y que permite solucionar el problema de cómo utilizar la distribución de probabilidad de pérdida para *identificar dimensiones de concentración de riesgo excesivo y fijar límites de crédito* a partir de una medida de riesgo que para este caso es el Valor en Riesgo (VaR) de una cartera de créditos. El modelo CyRCE es uno de los modelos de riesgo de crédito que se ha desarrollado en los últimos años y permite evaluar de manera precisa la suficiencia del capital y provisiones por incobrabilidad

²⁰Este modelo fue desarrollado por el Phd. en Ciencias Matemáticas Javier Márquez Diez Canedo, Gerente de Riesgos del Banco de México.

de una cartera crediticia de un banco, para lo cual compara el VaR de dicha cartera a un determinado nivel de confianza y horizonte de tiempo²¹ con las *provisiones por incobrabilidad más el capital*, de tal manera que el banco puede medir el riesgo asumido a un nivel de confianza dado. Con esto, se logra encontrar una regla explícita que relacione el riesgo de crédito con la suficiencia de capital y provisiones que es uno de los temas más importantes tanto para los reguladores como para los administradores de riesgo.

Por otro lado, este modelo supone que la distribución de pérdida de la cartera presenta una forma funcional misma que puede ser caracterizada por dos parámetros siendo estos la media y la varianza; así, en este modelo el VaR puede establecerse como la suma de la *pérdida esperada* más un cierto múltiplo de la desviación estándar de las pérdidas (*pérdida inesperada*). Este valor de riesgo de crédito así definido, se adopta como cota inferior al importe de capital y provisiones por incobrabilidad de la cartera de créditos que debe mantener un banco para que exista suficiencia de capital y provisiones; es decir, lo que se requiere es que las pérdidas esperadas e inesperadas estén cubiertas como mínimo por capital y provisiones por incobrabilidad de la cartera de créditos.

Cabe hacer notar que cuando se refiere a suficiencia de capital, el modelo CyRCE puede considerar en su análisis al capital contable, el regulatorio o el económico; de tal manera que de acuerdo al tipo de capital, el banco puede medir el riesgo específico asumido. Además la comparación entre el VaR y la suficiencia de capital y provisiones permite establecer una relación explícita entre el requerimiento de capital, provisiones y el riesgo de crédito.

En el modelo CyRCE, el VaR puede definirse como una expresión cerrada, la cual permite descomponer al riesgo en dos elementos esenciales siendo estos la *probabilidad de incumplimiento individual de los créditos* y la *concentración* en la cartera de créditos, donde la concentración por número de créditos es un factor que afecta al riesgo de crédito de la cartera debido a la existencia de correlación entre incumplimientos.

Por tanto, se puede concluir entonces que el modelo CyRCE logra que el banco pueda atender los siguientes problemas:

1. Concentración de riesgos
2. Determinación adecuada de límites de los créditos a partir de una medida de concentración.

²¹Usualmente el horizonte de tiempo utilizado para medir la máxima pérdida de un portafolio a un cierto nivel de confianza es un año.

3. Medición del requerimiento de capital y provisiones en función del riesgo asumido
4. Planificación crediticia para cada segmento de crédito.

Este último punto se refiere a que este modelo permite analizar los diferentes segmentos de créditos logrando establecer límites individuales diferenciados por segmento, obtener una medida de concentración del riesgo para cada segmento, establecer el requerimiento de capital y provisiones por segmento de crédito.

Entre las ventajas del modelo tenemos que se lo puede implementar con *información limitada* y por tratarse de expresiones cerradas es bastante *económico en el uso de recursos de cómputo* con relación a los demás paradigmas²² ya que los cálculos se reducen a multiplicaciones de matrices.

4.4.1. Modelo CyRCE avanzado

La concentración en los créditos de un banco ha sido identificada como una de las fuentes principales de riesgo de crédito; así, para controlar este riesgo, el administrador debe fijar límites a los montos de crédito en cada segmento del negocio. Normalmente este límite se especifica como una proporción δ del capital K ; sin embargo, esta política de mitigación de concentración no es la adecuada ya que pueden suceder los siguientes casos extremos donde se pueden tener carteras muy concentradas o altamente diversificadas:

1. El banco puede tener todo el crédito otorgado a un solo deudor sin que este crédito exceda la proporción del capital que exige el límite pero bajo cualquier criterio representaría una *cartera totalmente concentrada*²³.
2. El banco puede tener un millón de créditos del mismo tamaño en cuyo caso su *cartera estaría totalmente diversificada*²⁴, independientemente de que cada crédito respete o no el límite.

Así, cualesquiera que sean las virtudes de establecer límites como porcentaje del capital, no ayuda mucho para identificar la concentración del crédito de

²²Corresponde a los modelos crediticios utilizados a nivel internacional como son: CreditMetricsTM, KMV, CreditRisk⁺, Credit Portfolio View.

²³Por ejemplo, si en un banco con 100 millones de dólares de capital, los créditos están limitados a no exceder el 12% del capital, esto puede hacerse con solo un crédito de 12 millones, en cuyo caso la concentración es máxima.

²⁴Por ejemplo, si la cartera tiene 100 mil créditos y cada uno de estos no excede el 12% del capital, entonces la cartera es altamente diversificada.

una cartera, por lo que se debe hacer a un lado la tradición y asignar los límites de los créditos como una proporción θ del valor de la cartera total V , ya que una cartera compuesta de créditos con montos iguales corresponde a una cartera diversificada.

Sin embargo, esta nueva asignación del límite para el k -ésimo crédito (f_k) a partir del volumen de la cartera, resulta exactamente igual que establecer el límite del crédito como una proporción δ del capital K , siempre y cuando se considere la razón de capitalización del banco ω , como se aprecia a continuación:

$$\begin{aligned} f_k &\leq \delta K = \delta \frac{K}{V} V \\ &\leq \delta \omega V \\ &\leq \theta V \end{aligned} \tag{19}$$

donde $k = 1, \dots, N$, y N representa el número total de créditos de la cartera.

Por lo que en adelante se considera que *el límite sobre el tamaño de los créditos se fija en función del volumen de la cartera V del banco y no de su capital K .*

En este modelo se considera el estudio de la cartera de créditos segmentada por grupos que presentan características comunes, lo cual permite efectuar un análisis adecuado de la cartera debido a que cada segmento es considerado como un solo crédito ya que los créditos que conforman el segmento se comportan como si fuesen uno solo, lo que permite al analista trabajar con un menor número de elementos y optimizar recursos computacionales. El modelo CyRCE Avanzado permite una segmentación totalmente arbitraria²⁵ del portafolio de manera que puede analizarse desde varios ángulos y *permite determinar los segmentos donde la concentración es potencialmente riesgosa*, lo que a su vez permite la distinción de límites para cada segmento, así como la evaluación en términos de la suficiencia de capital y suficiencia de provisiones.

Para el desarrollo del modelo CyRCE Avanzado²⁶ se tiene que mantener los siguientes supuestos:

²⁵Para segmentar una cartera de créditos se puede hacer referencia a cualquier criterio como por ejemplo aquel que tenga que ver con el otorgamiento de los créditos, la región geográfica, la industria, el destino, el monto, el plazo, comportamiento de pago de los créditos, etc.

²⁶Un mejor detalle de los modelos CyRCE puede encontrarse en el libro de Javier Márquez (2004).

- a) La probabilidad de incumplimiento es la misma para los créditos que pertenecen a un segmento; y, diferente entre segmentos crediticios.
- b) La correlación de incumplimientos entre cada par de créditos de un segmento es la misma.
- c) La correlación de incumplimientos entre cada par de créditos de diferentes segmentos es la misma.

Análisis de concentración en segmentos individuales Se supone que se ha especificado a priori h segmentos arbitrarios de una cartera de créditos, entonces el vector de créditos F , sería $F^T = (F_1, \dots, F_h)$ donde F_i es un vector que contiene los saldos de los créditos que pertenecen al i -ésimo segmento. Ahora se particiona el vector de probabilidades esperadas de incumplimiento y la matriz de varianza-covarianza, de esta manera:

- a) $\pi = (\pi_i)$, π_i es el vector de probabilidades de impago del segmento i , $i = 1, 2, 3, \dots, h$.
- b) La matriz de varianza-covarianza se particiona como:

$$M = \begin{bmatrix} M_1 & C_{12} & \dots & C_{1h} \\ C_{21} & M_2 & \dots & C_{2h} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{h1} & C_{h2} & \dots & M_h \end{bmatrix} \quad (20)$$

donde M_i corresponde a la matriz de varianza-covarianza de la probabilidad de impago del grupo i de dimensión $n_i \times n_i$, donde n_i es el número de créditos en el segmento i y las matrices $C_{i,j}$ contienen las covarianzas de las probabilidades de impago entre los créditos del grupo i y los del grupo j .

A partir de aquí, se define V_i al valor de la cartera asociada al segmento i tal que

$$V_i = \sum_{j \in F_i} f_j$$

y

$$\sum_{i=1}^h V_i = V,$$

Además, el capital asignado al segmento i se lo obtiene de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} K_i &= \gamma_i K \\ \gamma_i &= \frac{V_i}{V} \end{aligned}$$

donde γ_i es la proporción de capital que el administrador asigna al segmento i ; con $\gamma_i \in [0, 1] \forall i$ y $\sum_{i=1}^h \gamma_i = 1$.

Para el análisis de la concentración en segmentos individuales, se particiona a la matriz M en S_i matrices cuya representación es la siguiente:

$$S_i = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \dots & C_{1i} & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ C_{i1} & \dots & 2M_i & \dots & C_{ih} \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & C_{hi} & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (21)$$

Donde cada matriz S_i considera las correlaciones entre incumplimientos de los créditos del segmento i con los demás segmentos pero elimina las correlaciones entre los demás grupos que no inciden directamente sobre el grupo en cuestión. De esta forma, las matrices S_i cumplen con la propiedad siguiente:

$$\sum_{i=1}^h S_i = M \quad (22)$$

La desigualdad de Valor en Riesgo para el *segmento* i sería:

$$\begin{aligned} VaR_\alpha^i &= \pi_i^T F_i + z_\alpha \sqrt{F^T S_i F} \\ &\leq K_i + provisiones_i = \gamma_i K + \gamma_i provisiones_i \\ &\text{con} \\ &i = 1, 2, \dots, h. \end{aligned} \quad (23)$$

Otra forma de escribir la expresión anterior pero que permita visualizar el impacto de la dependencia del *grupo* i con los demás grupos es:

$$\begin{aligned}
VaR_\alpha^i &= \pi_i^T F_i + z_\alpha \sqrt{F_i^T M_i F_i + 2 \sum_{j/j \neq i} F_i^T C_{ij} F_j} \\
&\leq K_i + provisiones_i = \gamma_i K + \gamma_i provisiones_i \\
&\text{con} \\
&i = 1, 2, \dots, h
\end{aligned} \tag{24}$$

donde:

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{F_i^T M_i F_i}{F_i^T F_i}} = \sqrt{R_i(F_i, M_i)}$$

De tal manera, para obtener la cota máxima de concentración que puede soportar el *segmento i* se tiene que dividir la desigualdad (24) para V_i así:

$$H(F_i) \leq \left(\frac{\Psi_i + \bar{p}rov_i - \bar{p}}{Z_\alpha \sigma_i} \right)^2 - \frac{2}{(\sigma_i V_i)^2} \sum_{j/j \neq i} F_i^T C_{ij} F_j \tag{25}$$

Se nota que la cota de concentración ahora incluye una *corrección por la correlación* entre la probabilidad de impago de los créditos del *segmento i* con las probabilidades de impago de los créditos de otros segmentos (la parte final de la expresión). Esto concuerda con la intuición, dado que una correlación alta de impago con los créditos de otros segmentos, indica que se puede tolerar menos concentración en el grupo “i”.

Suficiencia de Capital para una Cartera Segmentada Para integrar el análisis de los segmentos individuales en toda la cartera, es importante tomar en cuenta dos cosas; primero, que los pesos relativos de cada segmento en la cartera no alteren los resultados obtenidos para la cartera no segmentada; y segundo, que se mantenga una propiedad de aditividad que permita sumar los requerimientos de capital de los segmentos individuales para obtener el requerimiento para la cartera en su conjunto, para lo cual se tiene que realizar un ajuste a la expresión de Valor en Riesgo por segmento mediante la introducción del factor ϕ , así:

$$\begin{aligned}
VaR_\alpha^i &= \pi_i^T F_i + z_\alpha \phi \sqrt{F^T S_i F} \\
&\leq K_i + provisiones_i \\
&\leq \gamma_i (K_i + provisiones_i) \\
&\text{con } i = 1, 2, \dots, h
\end{aligned} \tag{26}$$

donde:

$$\phi = \frac{\sqrt{F^T M F}}{\sum_{i=1}^h \sqrt{F^T S_i F}}. \tag{27}$$

Reordenando la expresión (26) es posible visualizar el impacto que tiene la dependencia de los grupos en el Valor en Riesgo del *grupo* i de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
VaR_\alpha^i &= \pi_i^T F_i + z_\alpha \phi \sqrt{F_i^T M_i F_i + 2 \sum_{j/j \neq i} F_i^T C_{ij} F_j} \\
&\leq K_i + provisiones_i = \gamma_i (K + provisiones_i) \\
&\text{con } i = 1, 2, \dots, h
\end{aligned} \tag{28}$$

Mediante este ajuste se determina que el Valor en Riesgo de la cartera total es:

$$VaR_\alpha = \sum_{i=1}^h VaR_\alpha^i \tag{29}$$

Y para obtener la suficiencia de capital y provisiones que necesita el *segmento* i para cubrir su nivel de riesgo, se tiene que dividir la expresión (28) para V_i , dando como resultado:

$$\Psi_i + \bar{prov}_i \geq \frac{VaR_\alpha^i}{V_i} = \bar{p}_i + z_\alpha \phi \sigma_i \sqrt{H(F_i) + \frac{2}{(\sigma_i V_i)^2} \sum_{j/j \neq i} F_i^T C_{ij} F_j} \tag{30}$$

Reordenado la expresión anterior es posible identificar el máximo límite de concentración que puede soportar el segmento i así:

$$H(F_i) \leq \left(\frac{\Psi_i + p\bar{r}ov_i - \bar{p}}{Z_\alpha \phi \sigma_i} \right)^2 - \frac{2}{(\sigma_i V_i)^2} \sum_{j/j \neq i} F_i^T C_{ij} F_j \quad (31)$$

y por tanto, la expresión para determinar los límites individuales para los créditos del *segmento i* sería:

$$\theta_i \leq \left(\frac{\Psi_i + p\bar{r}ov_i - \bar{p}}{Z_\alpha \phi \sigma_i} \right)^2 - \frac{2}{(\sigma_i V_i)^2} \sum_{j/j \neq i} F_i^T C_{ij} F_j \quad (32)$$

De lo anterior es evidente como se obtiene límites individuales diferenciados por segmento y que dependen de dos factores a saber:

1. La razón de suficiencia de capital y provisión idiosincrásica del *segmento i*

$$\left(\frac{\Psi_i + p\bar{r}ov_i - \bar{p}}{Z_\alpha \phi \sigma_i} \right)^2 \quad (33)$$

2. La corrección por correlación con otros segmentos:

$$\frac{2}{(\sigma_i V_i)^2} \sum_{j/j \neq i} F_i^T C_{ij} F_j \quad (34)$$

Si la expresión (30) se cumple para todos los segmentos de la cartera y considerando que $\gamma_i = \frac{V_i}{V}$ entonces se tendría que la suficiencia de capital del portafolio total puede ser obtenido a partir de la suficiencia de capital de cada segmento tal como se observa a continuación:

$$\Psi + p\bar{r}ov = \sum_{i=1}^h \gamma_i (\Psi_i + p\bar{r}ov_i)$$

Este análisis permite obtener relaciones simples a partir de las cuales se puede establecer la suficiencia de capital. Las expresiones obtenidas puede usarse como instrumentos normativos para determinar límites individuales, cambios en la composición de la cartera y/o ajustes al capital requeridos para mantener suficiencia si cambia el comportamiento de impago de los créditos en alguno o todos los segmentos.

Modelo CyRCE Gamma Dentro de esta sección se ha considerado que la distribución de pérdidas se aproxima con una Normal, por lo que ésta distribución queda completamente caracterizada por su media y su varianza. Sin embargo, la distribución normal tiene dos características que son irreales para la distribución de pérdidas de un portafolio crediticio, siendo estos, la simétrica y colas no pesadas, situación que indica que no puede cuantificar las pérdidas extremas de la distribución de pérdida, siendo ésta la principal característica de un portafolio crediticio; en este sentido, es necesario identificar una distribución que pueda cuantificar las pérdidas extremas del portafolio y que pueda ser caracterizada por la media y la varianza; esta distribución corresponde a la Gamma, misma que es expresada de la siguiente manera:

$$f(x | \alpha, \beta) = \frac{x^{\alpha-1}}{\beta\Gamma(\alpha)} e^{-\frac{x}{\beta}} \quad (35)$$

donde su media y varianza respectivamente son:

$$E(x) = \alpha\beta \quad (36)$$

$$Var(x) = \alpha\beta^2 \quad (37)$$

Así, a través del modelo *CyRCE Avanzado* es posible determinar la media y la varianza de la distribución del portafolio, y por medio de éstas se puede calibrar la distribución Gamma a través de la resolución del sistema de ecuaciones formado por las expresiones (36) y (37) respectivamente, dando como resultado la estimación de los parámetros α y β y así poder estimar de manera adecuada la distribución de pérdidas del portafolio crediticio.

Factores principales del modelo A continuación se presenta las principales implicaciones de las relaciones entre la concentración de la cartera y la cota máxima, la probabilidad de incumplimiento y la suficiencia de capital y provisiones, permiten verificar la consistencia del modelo, mostrando la utilidad que tiene el modelo para la administración de riesgos, la regulación y la supervisión bancaria.

- i) Si $H(F) > \Theta(p, \Psi, \bar{p}rov, \alpha)$, el capital y las provisiones del banco están en riesgo para el nivel de confianza escogido.
- ii) Si $p > \Psi + \bar{p}rov$, el capital y las provisiones del banco son insuficientes para enfrentar el riesgo asumido para cualquier nivel de confianza y valor de

la medida de concentración $H(F)$.

Existe una relación directa entre la concentración admisible Θ y la razón de capitalización Ψ más provisiones y , una relación inversa entre la concentración admisible Θ y la probabilidad de incumplimiento p .

- iii) Si $\Theta(p, \Psi, \bar{p}rov, \alpha) > 1$, cualquier nivel de concentración $H(F)$ es aceptable.

La demostración de este teorema se encuentra en Javier Márquez Díez Canedo (2006), *Una nueva visión del riesgo de crédito*, Limusa, página 172.

Los resultados anteriores son congruentes con la intuición, así, un incremento de la probabilidad de incumplimiento como de la concentración implica que se requiere más capital y provisiones para hacer frente al riesgo asumido por el banco.

5. Aplicación en una cartera automotriz

En secciones anteriores, se han detallado los principales modelos de riesgo de crédito que son utilizados en mercados desarrollados para determinar la distribución de pérdida de un portafolio; así también, un modelo de crédito para mercados emergentes que permite medir el nivel de concentración que se presenta en una cartera de crédito; estos modelos, logran que una institución financiera pueda constituir de manera coherente las provisiones y el capital económico para cubrir un cierto nivel de riesgo asumido por la colocación de créditos, de tal manera que estos modelos son herramientas esenciales para una adecuada administración del riesgo crediticio. El desarrollo teórico de los modelos de riesgo de crédito permite generalizarlos a partir de los modelos de mixtura y de las funciones cópula; y logra determinar que la concentración de una cartera incide directamente en el riesgo de crédito. Estos conceptos facilitan la comprensión de los modelos de crédito y transparentan la calibración e implementación de los mismos en cualquier cartera; además, a partir de la teoría de los modelos crediticios se puede construir herramientas para la gestión de un portafolio como por ejemplo:

- *La frontera eficiente de un portafolio crediticio*; donde se relaciona el riesgo con la rentabilidad esperada de un portafolio; constituyéndose, en una herramienta óptima para la planificación estratégica de la institución financiera.
- *La asignación de cupos*, donde se asigna de manera adecuada los montos solicitados de los créditos según su nivel de riesgo; lo que constituye

una herramienta fundamental para controlar el riesgo a través del monto aprobado.

En esta sección se hará uso de los conceptos de riesgo de crédito para desarrollar, implementar y calibrar los modelos CreditMetricsTM, Credit Portfolio View, CreditRisk⁺, CyRCE y la Cópula t de Student en una cartera de créditos automotrices con información histórica desde Enero del 2006 hasta Diciembre del 2008, mismos que permitirán determinar la pérdida futura que puede tener la cartera en los próximos seis meses. Con el desarrollo de estos modelos se conforma un sistema que permite analizar y monitorear el riesgo de una cartera crediticia en el mediano plazo dando lugar al diseño de políticas para el control y la mitigación del riesgo de crédito.

5.1. Descripción del portafolio de crédito

El portafolio crediticio a utilizar comprende créditos comerciales del segmento automotriz,²⁷ con montos promedios de 13000 USD, plazo de cuatro años y tasa de interés del 14%. A inicios del período (Enero 2006) los créditos vigentes estaban conformados por 577 y al final (Diciembre 2008) se dispone de 1857 créditos, por lo que el crecimiento promedio mensual de los créditos vigentes de esta cartera es del 4% mensual.

Para conocer la pérdida potencial que puede tener un portafolio, primero se tiene que determinar la pérdida (P_i) de cada *crédito* i para lo cual se tiene que disponer de las siguientes variables: *el incumplimiento* (Y_i), *la exposición* (E_i) y *la severidad* (Δ_i); donde la pérdida potencial del *crédito* i es expresada de la siguiente manera:

$$P_i = E_i \Delta_i Y_i \quad (38)$$

de tal manera que la pérdida del portafolio se la obtiene así:

$$L = \sum_{i=1}^m E_i \Delta_i Y_i, \quad (39)$$

donde m corresponde al número de créditos que tiene el portafolio. De lo anterior, se observa que la pérdida del portafolio está condicionada a la distribución multivariada del incumplimiento de los créditos, misma que es

²⁷Por razones de confidencialidad de la institución financiera se ha decidido mantener en reserva el origen de la información; sin embargo, este limitante no afecta de ninguna manera a los resultados obtenidos respecto a la distribución de pérdida de este portafolio.

obtenida a partir de la evolución histórica de la tasa de incumplimiento de los grupos homogéneos del portafolio de créditos automotrices. Para construir la tasa de incumplimiento se tiene que seguir los siguientes pasos:

1. *Definir el evento de incumplimiento para cada crédito.*
2. *Segmentar la cartera automotriz en grupos homogéneos crediticios.*

En el primer paso, se tiene que *definir de manera adecuada el incumplimiento de un crédito i* , misma que es expresada a partir de una variable dicotómica de la siguiente manera:

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{si el crédito } i \text{ incumple} \\ 0, & \text{caso contrario} \end{cases} \quad (40)$$

Esta variable es fundamental para la obtención de la distribución de pérdida y por ende en la construcción del modelo crediticio, debido a que el incumplimiento proporciona la información necesaria para identificar las pérdidas reales que presenta la institución financiera en la cartera de crédito. Cabe mencionar que la variable incumplimiento del *crédito i* es construida a partir de la información de los días de mora, de la siguiente manera:

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{si } n > n_u \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (41)$$

donde n corresponde los días de mora del *crédito i* y n_u representa el número de días de mora máximo que puede tener un crédito para no ser considerado como un crédito incumplido; por ejemplo, si se conoce a priori que el promedio de los días de mora de los créditos de una cartera automotriz es 12, significa que en términos normales los deudores se retrasan en sus pagos hasta 12 días; sin embargo, si un crédito retrasa su pago en 30 días esto indica que el deudor no tiene la capacidad o la voluntad de cancelar la cuota, por lo que se podría esperar que el saldo del crédito no sea cancelado de tal manera que este crédito sea considerado como incumplido ya que representa una pérdida potencial para la institución financiera.

Del ejemplo anterior se evidencia la importancia que tiene la identificación de los días de mora máxima para la especificación del incumplimiento de un crédito, para lo cual se utiliza el *método de cascada* donde se analiza el comportamiento crediticio de grupos de créditos y con este método se evidencia que el comportamiento de los créditos con días de mora entre 31 y 60 días tienden a deteriorar más rápido la calidad crediticia, por lo que podría considerar que

los días de mora máximo que puede tener un crédito para no ser considerado como incumplido es de 60 días.

En el segundo paso se tiene que segmentar la cartera crediticia en grupos homogéneos ya que no es posible realizar el análisis de la dependencia entre los créditos incumplidos de manera individual debido a las siguientes razones:

1. Los créditos no son originados al mismo tiempo ni tienen el mismo plazo por lo que complica el análisis del portafolio.
2. Pueden existir créditos con buen comportamiento crediticio por lo que la estimación del incumplimiento conjunto del portafolio puede ser inconsistente.
3. Para cuantificar la dependencia entre incumplimientos se tiene que disponer de la matriz de correlación, por lo que en portafolios con gran cantidad de créditos esta matriz es difícil de construir.

A partir de lo anterior se evidencia la necesidad de identificar grupos homogéneos en el portafolio crediticio para un mejor análisis de la dependencia de los créditos; sin embargo, esta agrupación no puede ser realizada a partir de los días de mora del crédito ya que a priori no se conoce el comportamiento de los créditos. En este sentido la técnica utilizada para segmentar el portafolio es el árbol de decisión también conocido como *detección de interacción automática Ji-cuadrada* (CHAID) que permite identificar divisiones óptimas cuando las variables dependientes son continuas, nominales e incluso categóricas. Este procedimiento determina una serie de reglas que permite obtener una partición del portafolio original a partir de alguna variable clave. Tras utilizar como variable clave a los días de mora y como variables independientes a la tasa de interés y el plazo; el método CHAID arrojó una segmentación de tres grupos, donde el primer grupo tiene en promedio una tasa de incumplimiento del 2.4 %, el segundo del 1.9 % y el tercero del 0.9 % (Cuadro 2).

Por medio del método CHAID se observa claramente que cada grupo homogéneo tiene un comportamiento específico; así, el grupo G1 presenta la mayor tasa de incumplimiento mientras que G3 tiene la menor tasa; sin embargo, la tasa de interés y el monto de los créditos aprobados en cada grupo no están acordes con el nivel de riesgo asumido por la institución financiera; por ejemplo, el grupo con mayor tasa de incumplimiento presenta en promedio la menor tasa de interés y el mayor monto, situación que evidencia que las herramientas utilizadas por la institución financiera para administrar el riesgo son inadecuadas. En la Figura 13 se observa el comportamiento de los grupos crediticios en los últimos 30 meses, donde se evidencia una caída en la tasa de

Subgrupo	N° de créditos	% de la cartera	Índices promedios			
			Incumplimiento	Tasa de interés	Monto	Plazo
G1	5742	14.39 %	2,4 %	13.55 %	13,427	3.39 años
G2	17495	49.97 %	1,9 %	13.92 %	13,236	4.05 años
G3	13409	35.64 %	0,9 %	14.59 %	12,886	3.02 años

Cuadro 2: Tabla resumen de los tres grupos crediticios homogéneos de una cartera crediticia comercial automotriz que son creados a partir del método CHAID.

incumplimiento por lo que se puede garantizar que este comportamiento no es estacionario y evidencia la necesidad de incorporar en los modelos de créditos esta tendencia de los créditos incumplidos.

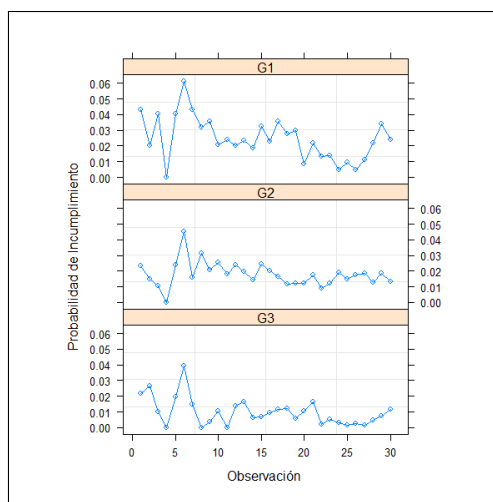


Figura 13: Evolución del incumplimiento para tres grupos homogéneos crediticios desde Junio del 2006 hasta Diciembre 2008.

Finalmente, para conocer la pérdida potencial que puede tener el portafolio de créditos automotrices en los próximos seis meses, se tiene que conocer la exposición de cada *crédito i* al momento del incumplimiento, la misma que corresponde al saldo de los créditos; sin embargo, esta información es difícil de conocer a priori debido a que es variante en el tiempo. Una aproximación de la exposición de cada crédito se la obtiene a partir del saldo inicial (S_i^0) que tiene el *crédito i* y de la tasa de exposición ponderada (Δ_i^e) del portafolio:

$$E_i = S_i^0 \Delta^e \quad (42)$$

donde la tasa de exposición corresponde al promedio histórico en n períodos de la razón entre el volumen total de créditos que han incumplido en una ventana temporal de seis meses ($VItot_i$) y el volumen total de los créditos al inicio de la ventana temporal ($Vtot_i$).

$$\Delta^e = \sum_{i=1}^n \frac{VItot_i}{Vtot_i}, \quad (43)$$

Donde la tasa de exposición de cada *crédito* i en la cartera automotriz es del 76.9 %.

Cabe mencionar que por falta de información de la recuperación de los créditos incumplidos de la cartera automotriz, se considera que la institución financiera pierde el 100 % de la exposición de los créditos incumplidos, por lo que este valor corresponde a la severidad que tendría cada crédito.

5.2. Ajuste de la cartera a modelos mixtura

Anteriormente se presentó que cualquier modelo crediticio comercial²⁸ pertenece a una de las siguientes categorías: *modelos por umbrales y los de mixtura*, donde estos modelos a primera vista parecen ser muy diferentes; sin embargo, matemáticamente son equivalentes siempre y cuando el retorno de los activos pueda ser expresado a partir de un modelo factorial. La equivalencia entre los modelos por umbrales y los de mixtura es obtenida bajo ciertas condiciones que dispone un mercado desarrollado, donde existe una amplia información histórica sobre el comportamiento de los retornos de los activos de las empresas; sin embargo, la información necesaria y suficiente para calibrar un modelo²⁹ de crédito es la evolución de la tasa de incumplimiento de los créditos, esta información sin más complicación puede ser obtenida para cualquier institución financiera de tal manera que los modelos crediticios comerciales pueden ser implementados y calibrados en mercados poco desarrollados como es el caso Ecuatoriano.

Cabe mencionar que los modelos de créditos son un caso especial de los modelos lineales generalizados mixtos (GLMM), por lo que se puede utilizar los

²⁸Los modelos que se hacen referencia son: CreditMetrics^{MT}, Credit PortfolioView, CreditRisk⁺.

²⁹Un mejor detalle sobre la calibración de los modelos para portafolios crediticios puede encontrarse en el libro Quantitative Risk Management desarrollado por Alexander J. McNeil, Rudiger Frey and Paul Embrechts.

Modelo	Estructura	Parámetros	Valores
CreditMetrics TM	$p_i(\omega) = \Phi(\mu_{r(i)} + \beta x + \sigma\omega)$	$\mu_{r(G1)}$	-1.83
		$\mu_{r(G2)}$	-1.94
		$\mu_{r(G3)}$	-2.21
		β	-0.01
		σ	0.112
Credit PortfolioView	$p_i(\omega) = \frac{1}{(1+\exp(\mu_{r(i)}+\beta x+\sigma\omega))}$	$\mu_{r(G1)}$	-3.33
		$\mu_{r(G2)}$	-3.60
		$\mu_{r(G2)}$	-4.31
		β	-0.03
		σ	0.27
CreditRisk ⁺	$p_i(\omega) = 1 - e^{(-e(\mu_{r(i)}+\beta x+\sigma\omega))}$	$\mu_{r(G1)}$	-3.38
		$\mu_{r(G2)}$	-3.69
		$\mu_{r(G3)}$	-4.29
		β	-0.03
		σ	0.33
Cópula t	$p_i(\omega) = \Phi(\mu_{r(i)} + \beta x + \sigma\omega)$	$\mu_{r(G1)}$	-2.41
		$\mu_{r(G2)}$	-2.6
		$\mu_{r(G3)}$	-2.9
		β	-0.01
		σ	0.112
		gl	27.46

Cuadro 3: Estimación de los parámetros de cuatro modelos crediticios para un portafolio formado por tres grupos homogéneos.

métodos de estimación de los modelos GLMM para determinar los parámetros de un modelo de crédito³⁰.

Para calibrar de manera adecuada los modelos crediticios, a la información de la cartera automotriz, se tiene que incorporar en el modelo las siguientes características del portafolio de crédito:

1. *Características propias de cada grupo homogéneo*, donde cada grupo crediticio presenta cualidades específico de calidad crediticia; por ejemplo, en el *grupo crediticio G1* incorpora créditos cuya tasa de incumplimiento es la más alta de todos los créditos del portafolio.
2. *Tendencia decreciente en la tasa de incumplimiento en cada grupo homogéneo*; por ejemplo, se aprecia que el primer dato de la tasa de in-

³⁰El método utilizado para estimar los parámetros de los modelos de créditos es el de máxima verosimilitud debido a que se obtiene estimaciones más consistentes.

cumplimiento de los créditos que pertenecen al *grupo crediticio G1* es del 4%, mientras que el último dato es del 2% (Figura 13).

3. *Alta variabilidad de la tasa de incumplimiento para cada grupo homogéneo*; por ejemplo, para el *grupo crediticio G1* se observa que la tasa de incumplimiento fluctúa entre el 6% y 0.5% (Figura 13).

Para incorporar las características del portafolio automotriz en el modelo GLMM, es necesario que el modelo incorpore un *vector de efectos fijos* ya que esto permite tomar en cuenta la calidad crediticia de cada grupo homogéneo, *una variable exógena* que corresponde a la tendencia de la tasa de incumplimiento; y, *un efecto aleatorio* que permite tomar en cuenta la variabilidad de la tasa de incumplimiento y se puede considerar como el factor sistémico que afecta a toda la cartera de manera general.

Grupo crediticio	CM	CPV	CRP	CT	M.M
G1	2.438	2.46	2.463	1.715	2.464
G2	1.878	1.881	1.801	1.23	1.794
G3	0.934	0.942	0.99	0.655	0.982

CM = CreditMetricsTM
 CPV = Credit PortfolioView
 CRP = CreditRisk⁺
 CT = Cópula t de Student
 M.M = Método de momento

Cuadro 4: Estimación de la probabilidad de incumplimiento de cada grupo crediticio utilizando modelos de mixturas y el método de momentos.

Cabe mencionar que a partir de las estimaciones de los parámetros de cada modelo de crédito³¹ (Cuadro 3) se observa que el intercepto de cada grupo homogéneo permite cuantificar de manera adecuada la tasa de incumplimiento esperada en cada grupo; así, en el modelo CreditMetricsTM, el valor más bajo del intercepto corresponde al grupo de crédito que tiene la menor tasa de incumplimiento. Como caso especial de los modelos de crédito se tiene a la *cópula t de Student*, la cual permite cuantificar eventos de incumplimiento extremos en el portafolio a partir de los grados de libertad de la distribución t de Student, donde se observa que los grados de libertad para este modelo es del 27.46,³² indicando que la cola superior de la distribución de pérdidas

³¹Las estimaciones de los modelos se las obtuvieron a partir del software R por medio del paquete QRMLib que es un módulo gratuito y sirve de apoyo del libro Quantitative Risk Management que fue desarrollado por Alexander J. McNeil, Rudiger Frey and Paul Embrechts.

³²El programa para la estimación de los grados de libertad fueron realizados en el paquete R.

MODELO	GRUPO	GRUPO		
		G1	G2	G3
CM	G1	0.286	0.261	0.202
	G2	0.261	0.238	0.184
	G3	0.202	0.184	0.143
CPV	G1	0.308	0.271	0.193
	G2	0.271	0.238	0.169
	G3	0.193	0.169	0.121
CRP	G1	0.406	0.347	0.260
	G2	0.347	0.297	0.221
	G3	0.260	0.221	0.164
CT	G1	1.291	0.791	1.058
	G2	0.791	1.138	1.002
	G3	1.058	1.002	0.888

CM = CreditMetricsTM
 CPV = Credit PortfolioView
 CRP = CreditRisk⁺
 CT = Cópula t de Student

Cuadro 5: Estimación de las matrices de correlación entre incumplimiento utilizando los modelos de mixtura.

del portafolio con créditos automotrices es pesada, esto significa que las pérdidas extremas del portafolio es ocasionada por la ocurrencia conjunta de los incumplimientos de los créditos.

Una de las pruebas que se utiliza para verificar si los modelos de créditos capturan de manera adecuada la información del incumplimiento del portafolio automotriz es comparar la probabilidad de incumplimiento estimada por cada modelo crediticio con la obtenida por el método de momentos (Cuadro 4); donde se puede apreciar que todos los modelos de crédito a excepción del *Cópula t de Student* presentan valores similares, esto puede deberse al método utilizado para determinar los grados de libertad de la *Cópula t de Student*; sin embargo, esta prueba es referencial y no permite concluir sobre la consistencia del modelo.

Para comprender la dependencia entre los incumplimientos de los créditos en cada grupo homogéneo, se utiliza la matriz de correlación entre incumplimientos (Cuadro 5); donde se puede observar que todas las matrices de correlación son similares, así la correlación entre los incumplimientos del *grupo crediticio G1* es la más alta (por ejemplo, en el modelo CreditMetricsTM es del 0.286 %); sin embargo, el modelo *Cópula t de Student* presenta valores muy diferentes, esto es debido a que en la *cópula t de Student*, la dependencia es explicada por medio de dos elementos: la matriz de correlación y los grados de

MODELO	GRUPO	Probabilidad de incumplimiento	Matriz de covarianza		
			G1	G2	G3
CM	G1	2.464 %	6.8e-05	5.5e-05	3.0e-05
	G2	1.794 %	5.5e-05	4.4e-05	2.4e-05
	G3	2.464 %	3.0e-05	2.4e-05	1.3e-05

$$CM = \text{CreditMetrics}^{TM}$$

Cuadro 6: Estimación de las matrices de covarianza entre incumplimiento utilizando los modelos de mixtura.

libertad, por lo que no tiene sentido comparar la correlación del modelo cópula con las obtenidas por los otros modelos de crédito.

5.3. Ajuste de la cartera al modelo CyRCE

En el modelo CyRCE al igual que los modelos comercializados de riesgo de crédito (por ejemplo: CreditMetricsTM y CreditRisk⁺) su diseño depende de que los créditos de la cartera bajo análisis estén calificados; lo que permite disponer de información sobre tasas de incumplimiento asociadas a cada calificación dando lugar a la obtención de sus respectivas *probabilidades de incumplimiento* y sus *correlaciones*. Estas se constituyen en los parámetros de un modelo de riesgo de crédito bajo el supuesto de que los retornos de los activos del portafolio siguen una distribución normal multivariada. El método utilizado para estimar la probabilidad de incumplimiento en cada calificación es el de máxima verosimilitud cuyo estimador corresponde al método de momentos; por otro lado, para facilitar la estimación de la correlación entre créditos incumplidos se utiliza un modelo de mixtura Probit ya que permite determinar la distribución conjunta de los créditos incumplidos de un portafolio específico y por ende la correlación entre los diferentes grupos crediticios tal como se observa en el Cuadro (6).

5.4. Prueba de desempeño de los modelos de crédito

La prueba de desempeño (*BackTesting*) es fundamental para el proceso de evaluación y calibración de los modelos de riesgo de crédito ya que permite verificar si el modelo está midiendo el riesgo de manera adecuada. Para realizar un *BackTesting* es necesario realizar estimaciones recursivas del Valor en Riesgo (VaR_α) de un portafolio de crédito para un período determinado, tal como se describe a continuación (en este caso se supone que existe información hasta el periodo n):

- i) Con la información hasta el período t , se calcula las pérdidas reales (L_{t+k}) y el Valor en Riesgo del portafolio ($\widehat{VaR}_{\alpha,t+k}$) con un nivel de confianza α , donde $t = n_1, n_1 + 1, \dots, n - k$ y k representa el tiempo de tenencia del portafolio.
- ii) A partir de los Valores en Riesgo estimados, se construye la sucesión I_{t+k} , la cual se define como:

$$I_{t+k} = \begin{cases} 1 & \text{si } L_{t+k} > \widehat{VaR}_{\alpha,t+k} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (44)$$

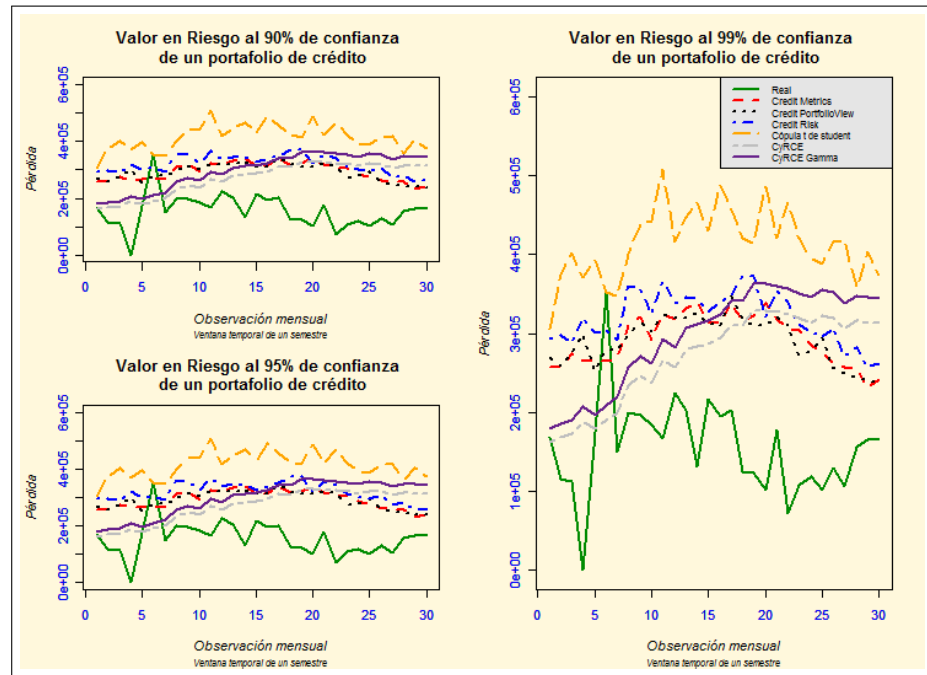


Figura 14: Evolución histórica del Valor en Riesgo semestral de un portafolio de créditos automotrices con un nivel de confianza del 90 %, 95 % y 99 %.

Los puntos antes mencionados permiten validar la consistencia de los modelos de riesgo de crédito ya que en un modelo adecuado de riesgo de crédito se debería esperar que la probabilidad de que las pérdidas reales superen al VaR_{α} (*proporción de fallas*) sea exactamente igual al nivel de significancia utilizado en el VaR_{α} ; o de manera equivalente se esperaría que la sucesión I_{t+k} este conformado por variables aleatorias i.i.d de experimentos de Bernoulli con

probabilidad de éxito cercano a $1 - \alpha$. Para probar la hipótesis nula de que la proporción de fallas sea exactamente igual al nivel de significancia del Valor en Riesgo ($H_0 : p = 1 - \alpha$), debe ocurrir que el estadístico de Kupiec³³ se distribuya asintóticamente como una Chi-cuadrado con un grado de libertad, mismo que tiene la siguiente forma:

$$LR_{pof} = -2 \log \left(\frac{p^x (1 - p)^{m-x}}{\hat{p}^x (1 - \hat{p})^{m-x}} \right) \tag{45}$$

donde m corresponde al número de observaciones incluidas en el *Backtesting*, x es el número de veces de que las pérdidas superan al VaR_α y $\hat{p} = x/m$ corresponde al estimador de máxima verosimilitud del parámetro p .

		Credit Metrics			Credit PortfolioView			Credit Risk		
Nivel de confianza		99 %	95 %	90 %	99 %	95 %	90 %	99 %	95 %	90 %
Excepciones		1	1	1	1	1	1	1	1	1
Excepciones esperadas		0.3	1.5	3	0.3	1.5	3	0.3	1.5	3
Probabilidad de fallas (PF)		3.3 %	3.3 %	3.3 %	3.3 %	3.3 %	3.3 %	3.3 %	3.3 %	3.3 %
PF esperadas		1 %	5 %	10 %	1 %	5 %	10 %	1 %	5 %	10 %
		Cópula t de Student			CyRCE			CyRCE Gamma		
Nivel de confianza		99 %	95 %	90 %	99 %	95 %	90 %	99 %	95 %	90 %
Excepciones		0	1	2	2	4	6	1	3	3
Excepciones esperadas		0.3	1.5	3	0.3	1.5	3	0.3	1.5	3
Probabilidad de fallas (PF)		0 %	3.3 %	6.6 %	6.6 %	13.3 %	20 %	3.3 %	10 %	10 %
PF esperadas		1 %	5 %	10 %	1 %	5 %	10 %	1 %	5 %	10 %

Cuadro 7: Índices de desempeño de los diferentes modelos crediticios en una cartera automotriz.

Para identificar el modelo de riesgo de crédito que mejor representa la realidad de la cartera de créditos automotrices, se realizan las pruebas de desempeño a los siguientes modelos de riesgo: CreditMetricsTM, Credit Portfolio View, Credit Risk⁺, Cópula t de Student, CyRCE y CyRCE Gamma. En la Figura 14 se visualiza que el VaR de los modelos crediticios CreditMetricsTM, Credit Portfolio View, Credit Risk⁺ y Cópula t de Student siguen la tendencia de las pérdidas del portafolio a diferencia de los modelos de concentración donde el VaR se estabiliza a partir de noviembre del 2007 (observación 17), esto se debe principalmente por la concentración de la cartera en el segmento

³³Un mejor detalle puede encontrarse en el documento *Backtesting* desarrollado por Peter Chirstoffersen.

de bajo riesgo.

Además se puede apreciar que el Valor en Riesgo del CreditMetricsTM, Credit Portfolio View, Credit Risk⁺ presentan valores similares, validando así la equivalencia entre estos modelos; situación que no causa sorpresa ya que todos estos modelos se fundamentan en distribuciones normales multivariadas.

Modelo	Pruebas de desempeño		
	Nivel de confianza		
	99 %	95 %	90 %
CreditMetrics	31.14 %	65.6 %	16.3 %
CreditPortfolioView	31.14 %	65.6 %	16.3 %
CreditRisk ⁺	31.14 %	65.6 %	16.3 %
Copula t	43.7 %	65.6 %	51.9 %
CyRCE	3.8 %	7.9 %	10.3 %
CyRCE Gamma	31.14 %	26.6 %	100 %

Cuadro 8: Probabilidad de que las proporción de fallas teóricas sea igual a las empíricas con información desde Junio de 2006 hasta Diciembre del 2008.

A primera vista, el VaR del modelo cópula t aparenta sobreestimar las pérdidas reales del portafolio; sin embargo, la probabilidad de fallas de este modelo es la más cercana al nivel de significancia empleado (Cuadro 7), identificando a éste como el mejor modelo que logra representar las pérdidas del portafolio automotriz; más aún, este modelo permite identificar de manera adecuada las pérdidas extremas del portafolio ya que la probabilidad de fallas se aproxima al nivel de significancia a medida que éste sea más pequeño. Lo mencionado anteriormente, se verifica a partir de la prueba estadística de Kupiec donde el modelo cópula t presenta las probabilidades más altas de no rechazar la hipótesis nula a diferencia de la obtenida por el CyRCE gamma al 90 % de confianza, lo anterior pone en evidencia que el modelo CyRCE gamma no tiene la capacidad para medir el riesgo extremo del portafolio; sin embargo, este modelo es más consistente cuando los niveles de confianza son bajos (Cuadro 8). Lo anterior pone en evidencia que el administrador de riesgo debe trabajar con algunos modelos de riesgo de crédito ya que cada uno tiene diferentes potencialidades y conjuntamente permiten monitorear el riesgo de manera efectiva.

5.5. Asignación de la Provisión y Capital Económico

En una institución financiera, la disponibilidad de modelos para portafolios crediticios permite al administrador disponer de indicadores de riesgo, y

como caso particular, ayuda a conformar las *provisiones y capital económico* que necesita la institución financiera para mitigar el nivel de riesgo asumido en el portafolio crediticio. En este sentido, para identificar las potencialidades que tiene cada modelo para constituir las provisiones y capital económico en la cartera de créditos automotrices, primero se realiza el análisis de la distribución de pérdida de una cartera formada por 1857 créditos para una ventana temporal de seis meses (Figura 15), obtenida a partir de los siguientes modelos crediticios: CreditMetricsTM, Credit Portfolio View, CreditRiks⁺, un modelo donde los créditos son independientes (Independiente) y la cópula t de Student; donde, se puede visualizar que existe gran similitud entre las distribuciones de pérdida obtenidas a partir de CreditMetricsTM, Credit Portfolio View y CreditRiks⁺, situación que no debe sorprender ya que éstos modelos se fundamentan en la misma distribución normal multivariada, lo que permite validar gráficamente la equivalencia de estos modelos.

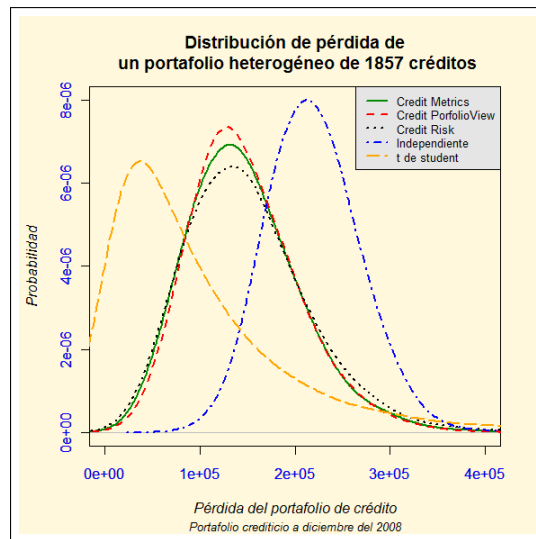


Figura 15: Estimación de la distribución de pérdida de 1857 créditos automotrices vigentes en Diciembre del 2008 a través de cinco modelos para portafolios crediticios en una ventana temporal de seis meses.

Además, cabe mencionar que la distribución de pérdida obtenida a partir de éstos modelos tiene la característica que la cola derecha sea ligeramente más pesada que la izquierda, lo que se evidencia que éstos modelos no logran capturar de manera adecuada las pérdidas extremas que se puede presentar en un portafolio crediticio, situación que no se presenta en la distribución de pérdida obtenida por el modelo cópula t de Student, por lo que este modelo

permite capturar la dependencia entre los créditos incumplidos y cuantificar las pérdidas potenciales que pueden darse en el portafolio crediticio.

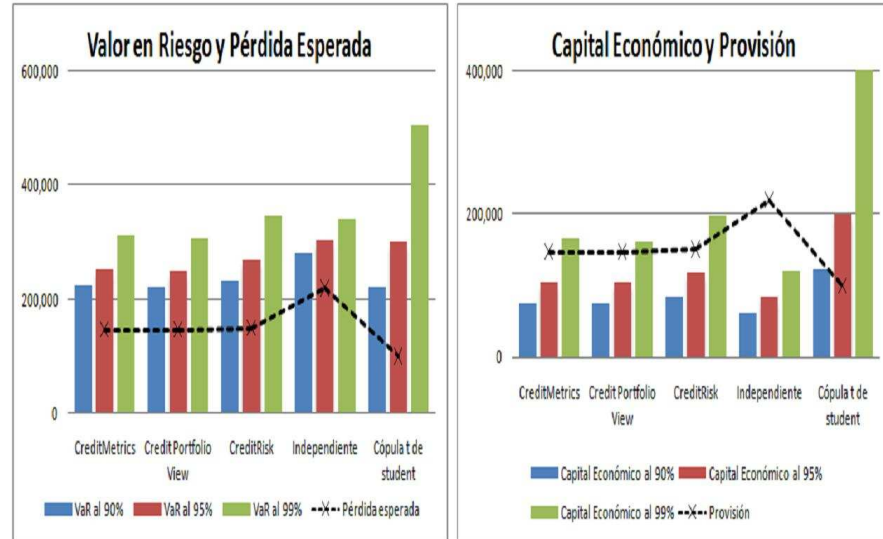


Figura 16: Estimación de la Provisión y Capital Económico para un portafolio formado 1857 créditos automotrices vigentes a Diciembre del 2008 por medio de la Pérdida Esperada y el Valor en Riesgo.

Por otro lado, al considerar que los créditos incumplidos sean independientes, se observa que la distribución de pérdida es simétrica y más aguda que cualquier otra distribución, por lo que este modelo no permite capturar las pérdidas potenciales que puede tener una cartera crediticia, situación que le convierte en un modelo muy irreal y cuyo uso pondría poner en riesgo la adecuada administración de la cartera de créditos.

Finalmente, para visualizar el impacto que tiene el uso de estos modelos en la asignación del Capital Económico y Provisión se comparan éstos índices de riesgo a diferentes niveles de confianza (Figura 16), donde se puede apreciar que los modelos CreditMetricsTM, Credit Portfolio View y CreditRiks⁺ dan como resultado valores similares lo que corrobora la similitud de éstos modelos; por otro lado, al comparar estos modelos con el modelo crediticio *independiente* se observa que este último asigna los valores más altos de Provisión, de lo que se evidencia que la dependencia entre créditos incumplidos no solamente afecta a las pérdidas extremas sino a toda la distribución de pérdida. Por último, al comparar el Capital Económico y las Provisiones generadas por la cópula

t de Student con los otros modelos crediticios, se puede apreciar que éste modelo asigna el valor más bajo para provisiones, donde el Capital Económico cambia según el nivel de riesgo que quiera cubrir la institución financiera. De lo anterior, se puede decir que el modelo crediticio cópula t de Student permite asignar de manera adecuada los recursos de la institución financiera, así para una cartera de 16,530,692 USD se tiene que disponer de 210,971 USD en Provisión y para cubrir un nivel de riesgo al 99% de confianza se tiene que disponer de 400,000 USD en Capital Económico.

5.6. Análisis de concentración y asignación de límites de créditos

El modelo CyRCE permite evaluar la suficiencia de capital y provisión que es asignado por un banco a una cartera de créditos, a través de la comparación del VaR de dicha cartera para un cierto nivel de confianza dado. Así el VaR constituye ser lo mínimo en capital y provisión que debe tener un banco para no incurrir en pérdidas por riesgo de crédito. La descomposición del VaR a partir del índice de Rayleigh y la concentración de Herfindahl Hirschman (HH) permiten apreciar en qué medida la concentración de la cartera contribuye al riesgo de crédito y logra identificar la máxima concentración que puede soportar un banco a partir del capital y provisiones asignado, lo que facilita la asignación de límites a los montos de los créditos logrando constituirse en una herramienta adecuada para monitorear y mitigar el riesgo de crédito.

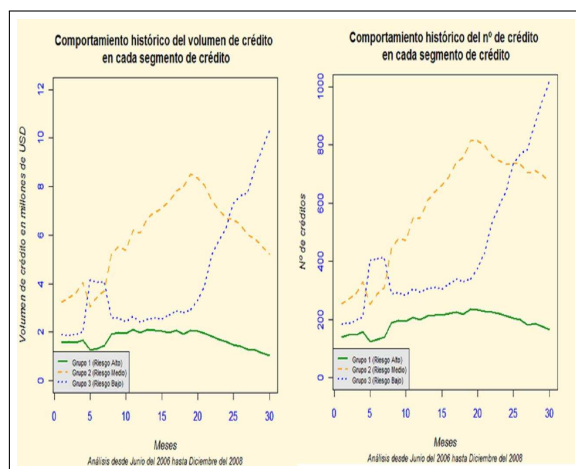


Figura 17: Comportamiento del volumen y número de créditos de los segmentos crediticios de Alto, Medio y Bajo riesgo en una cartera automotriz desde Junio del 2006 a Diciembre del 2008.

Para analizar la concentración de la cartera de créditos automotrices primero se realiza un análisis descriptivo gráfico del comportamiento del volumen y de la cantidad de créditos que pertenecen a los diferentes segmentos de riesgo, de tal manera que se pueda validar los resultados obtenidos con el modelo CyRCE. En la Figura 17 se observa como el comportamiento del volumen y la cantidad de créditos para los segmentos de *Riesgo Medio y Bajo* tienen un crecimiento sostenido desde Junio del 2006 hasta Diciembre del 2007 (*los primeros diez y nueve meses*); sin embargo, a partir de Enero del 2008 se aprecia claramente el cambio en las políticas crediticias donde se toman la decisión de *disminuir la colocación de los créditos en el segmento de Riesgo Medio y aumentar considerablemente en el segmento de Riesgo Bajo*. De lo anterior se puede pensar que la institución financiera dispone de herramientas para monitorear el riesgo; sin embargo, no dispone de herramientas para mitigarlo de manera adecuada, ya que las políticas deben ir direccionadas en la asignación de tasas de interés, plazo y/o el monto según el nivel de riesgo que tenga cada crédito, situación que no se observa en las políticas tomadas por la institución financiera.³⁴

A continuación se realiza un análisis de la concentración de la cartera de crédito automotriz a través del modelo CyRCE, donde se supone que la institución financiera mitiga el riesgo total de la cartera a partir del capital y provisiones que son conformados por la pérdida esperada y el VaR del modelo cópula t de Student;³⁵ además, para mitigar el riesgo crediticio de cada segmento, la institución financiera asigna una parte del capital y provisión del portafolio total igual a la proporción que tiene cada segmento crediticio en la cartera total (Cuadro 2).

Al realizar el *análisis de la suficiencia de capital y provisión* durante Junio del 2006 hasta Diciembre del 2008, se puede apreciar que la asignación realizada a la cartera total es adecuada; sin embargo, para los segmentos de *Riesgo Alto y Medio* solamente avanza a cubrir hasta Diciembre del 2007 y Junio del 2008 respectivamente (Figura 18).

Cabe mencionar que la brecha entre el capital y provisión con el VaR para los segmentos crediticios es más grande al inicio del período de análisis (*Junio del 2006*) y tiende a decrecer con el paso del tiempo; donde la brecha es mayor para el segmento de *Riesgo Bajo* y más corta para el segmento de *Riesgo Alto*, esto evidencia lo inadecuado de la política crediticia para mitigar el riesgo en cada segmento ya que se esperaría que la institución asigne más capital y provisión para el segmento con *Riesgo Alto* y menos al segmento de *Riesgo Bajo*.

³⁴Un mayor detalle puede encontrarse en el Manual para el Administrador el Riesgo, diseñado por la asociación internacional de administradores de riesgo PRMIA.

³⁵Anteriormente se identificó al modelo Cópula t de Student como el mejor modelo que permite capturar el comportamiento de las pérdidas de la cartera automotriz.

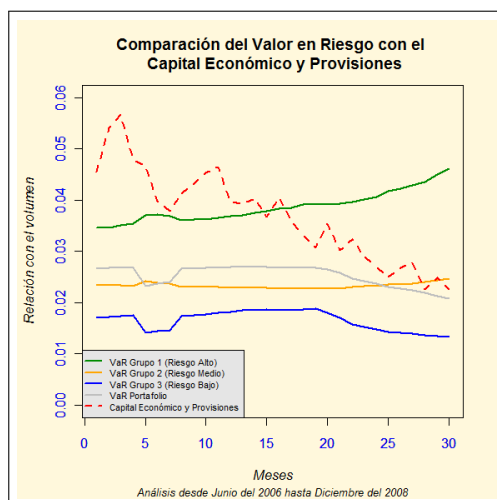


Figura 18: Comparación del Valor en Riesgo al 99 % de confianza con el Capital Económico y Provisiones del portafolio total y de los segmentos crediticios de Alto, Medio y Bajo riesgo desde Junio del 2006 hasta Diciembre del 2008.

A partir de la asignación de capital y provisión que realiza la institución financiera en cada segmento crediticio, se puede analizar el nivel de concentración que puede soportar estos segmentos; en la Figura 19 se puede observar que el segmento de *Riesgo Alto* (G1) puede soportar el nivel de concentración solamente en los meses comprendidos entre Junio y Septiembre del 2006 (*cuatro primeros meses de análisis*); el segmento de *Riesgo Medio* (G2) entre Junio del 2006 hasta Junio del 2008 (*diez y siete primeros meses*). Lo anterior pone nuevamente en evidencia que la asignación de capital y provisión para los segmentos crediticios es inadecuado, más aún, con el análisis de concentración se observa que la institución financiera tenía que haber reestructurado las políticas crediticias para el segmento de Riesgo Medio a partir de Junio de 2007 y mas no en Enero del 2008 (Figura 17).

Finalmente, a partir del análisis de concentración que realiza el modelo CyRCE a cada segmento de crédito, se puede asignar límites a los montos de los créditos, mismos que se les obtiene a partir del capital y provisión asignado en cada segmento. Para realizar el análisis de los límites crediticios durante Junio del 2006 hasta Diciembre del 2008, se seleccionan tres meses representativos, siendo estos Enero de 2006, Marzo de 2007 y Junio de 2008 (Figura 20), donde se identifica los montos de los créditos que superan el límite asignado por el modelo CyRCE para cada segmento crediticio, donde se puede observar que en Enero de 2006 el modelo limita a 15000 USD el monto de los créditos

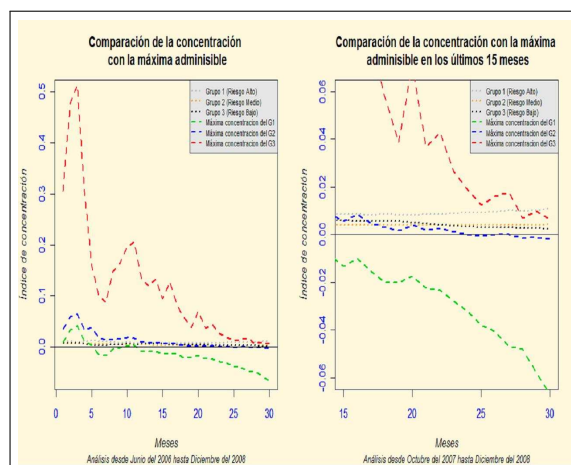


Figura 19: Comparación de la concentración de los segmentos crediticio de Alto, Medio y Bajo riesgo con la máxima admisible determinada por el modelo CyRCE desde Junio del 2006 hasta Diciembre del 2008.

que pertenecen al segmento de *Riesgo Alto*; en Marzo del 2007, el modelo indica que no se debe otorgar créditos (monto máximo de 0 USD) al segmento de *Riesgo Alto* y finalmente en Junio del 2008 el modelo solamente otorgar créditos al segmento de *Riesgo Bajo*. De lo anterior claramente se observa como el modelo CyRCE asigna el límite de los montos a partir de la capacidad que tiene el capital y provisión para soportar la concentración existente en cada segmento de crédito.

6. Conclusiones

En este documento, se presentó los fundamentos teóricos de portafolios crediticios que permiten calibrar los principales modelos utilizados a nivel internacional y por medio de las funciones cópulas poder extenderlos a un modelo general para portafolios crediticios, donde es posible cuantificar de manera adecuada la pérdida extrema del portafolio por medio de la Cópula multivariada t de Student, dando lugar la adecuada asignación de recursos de la institución financiera para conformar las provisiones y el capital económico en mercados donde la calidad y cantidad de información es escasa como es el caso ecuatoriano. Además, los fundamentos teóricos de portafolios crediticios permite calibrar el modelo CyRCE lo que facilita el monitoreo de la concentración de una cartera automotriz y poder asignar límites a los montos de los créditos

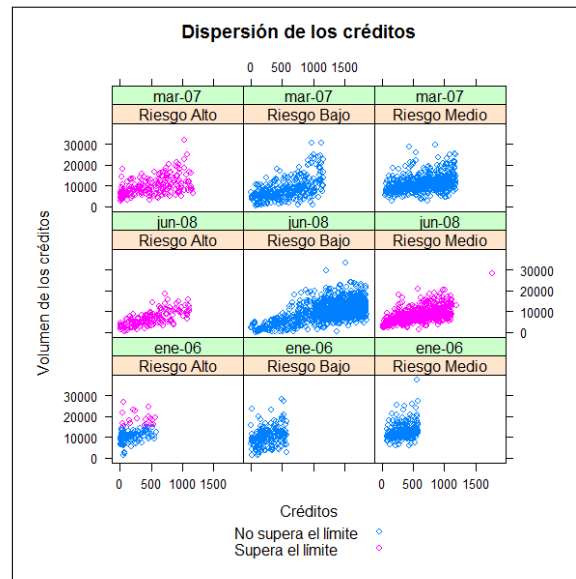


Figura 20: Identificación de los créditos que pertenecen a los segmentos crediticios de Alto, Medio y Bajo riesgo que superan el cupo máximo admisible por concentración crediticia.

a partir de la capacidad que tiene la institución financiera (el capital y provisión) para soportar la concentración existente en cada segmento de crédito. Cabe mencionar que la información necesaria y suficiente para estimar los parámetros de los modelos crediticios es la evolución histórica de la tasa de incumplimiento de cada segmento crediticio del portafolio total. A través de la prueba de desempeño (*BackTesting*) efectuadas a los modelos empleados en este trabajo, se determinó que el mejor modelo que cuantifica las pérdidas extremas del portafolio corresponde al modelo Cópula t Student confirmando que el uso de distribuciones normales multivariadas es inadecuado para cuantificar las pérdidas de un portafolio crediticio.

La aplicación de éstos modelos en carteras crediticias ecuatorianas permite conocer a la institución financiera el nivel de riesgo que está asumiendo en el negocio bancario, medir el impacto del riesgo en el rendimiento del portafolio; y facilitar la gestión de carteras por medio de la construcción de indicadores adelantados de la calidad crediticia los cuales incorporan el impacto de la concentración en el deterioro de cartera. En los últimos años, para impulsar el crecimiento de las instituciones financieras del Ecuador, estas han decidido

buscar nuevas alternativas de fondeo a través de la titularización de carteras crediticias, en este sentido los modelos crediticios constituyen ser una herramienta fundamental para cuantificar las garantías de los títulos valores instrumentados por operaciones crediticias que tomen en cuenta el nivel de riesgo de la cartera, dando lugar a títulos más apetecibles en el mercado de valores, garantizando así que la institución financiera obtenga la rentabilidad esperada del proceso de titularización.

Bibliografía

- Avila Embríz, F., M.D.C. Javier, and A. Romero Aranda. 2002. "Implantación del Modelo CyRCE: Simplificaciones por estructura y estimación de parámetros." Working paper, Banco de México.
- Alexander Zapata, G. 2004. "Modelando el Riesgo de Crédito: Matrices de transición para la cartera comercial." Apuntes de Banca y Finanzas No. 003226, ASOBANCARIA, Sep.
- Alán, E. 2004. *Medición integral de riesgo de crédito*. Limusa.
- Astebro, T. 2003. "Banff Credit Risk Conference." Working paper, University of Toronto.
- Banco de México. 2005. "Definiciones Básicas de riesgos." Working paper, Banco de México.
- Becerra, O., and L. Melo. 2008. "Medidas de riesgo financiero usando cópulas: teoría y aplicaciones." Borradores de Economía No. 489, Banco de la Republica de Colombia.
- Bluhm, C., L. Overbeck, and C. Wagner. 2002. *An introduction to Credit Risk Modelling*. Chapman & Hall.
- Chen, X. 2006. "Dependence and the copula approach." Working paper, Simon Fraser University.
- Cintas del Río Rosario. 2007. "Teoría de Cópulas y control de riesgo financiero." PhD dissertation, Universidad Complutense de Madrid.
- Cowles, M. 2006. "Generalized, Linear, and Mixed Models. Charles E. McCulloch and Shayle R. Searle." *Journal of the American Statistical Association* 101:1724–1724.
- Crouhy, M., D. Galai, and R. Mark. 2000. "A comparative analysis of current credit risk models." *Journal of Banking & Finance* 24:59–117.
- Céspedes, G., and J. Carlos. 2001. "Correlaciones y Cópulas en finanzas." Working paper, RiskLab.
- David, K. 2004. *The Professional Risk Manager's Handbook, Volumen III, Risk Management Practice*, vol. 3. The Official Handbook for the PRM Certification.
- Díaz-Hernández, A., and J.C. Ramírez-Sánchez. 2008. "Modelo de cálculo de capital económico por riesgo de crédito para portafolios de créditos a personas físicas." *Revista de Administración, Finanzas y Economía (Journal of Management, Finance and Economics)* 2:20–43.
- de Matteis, R. 2001. "Fitting copulas to data." Working paper, Swiss Federal Institute of Technology Zurich.

- Di Clemente, A., and C. Romano. 2004. "Measuring and Optimizing Portfolio Credit Risk: A Copula-based Approach." *Economic Notes* 33:325–357.
- Embrechts, P., F. Lindskog, and A. McNeil. 2001. "Modelling Dependence with Copulas and Application to Risk Management." Working paper, Swiss Federal Institute of Technology Zurich.
- Embrechts, P., A. McNeil, and R. Frey. 2005. *Quantitative Risk Management*. Princeton.
- Embrechts, P., A. McNeil, and D. Straumann. 1999. "Correlation: Pitfalls and Alternatives." Working paper, Swiss Federal Institute of Technology Zurich.
- Fernández, D., and R. Soares Netto. 2008. "Valor en Riesgo de las carteras de préstamos bancarios." Working paper, Universidad de la República.
- Fredrik, A., and U. Stanislav. 1999. "Credit risk optimization with conditional value at risk criterion." Working paper, Center for Applied Optimization, University of Florida.
- Frey, R., and A.J. McNeil. 2002. "VaR and expected shortfall in portfolios of dependent credit risks: Conceptual and practical insights." *Journal of Banking & Finance* 26:1317–1334.
- Galicía Romero, M. 2003. "Riesgo de crédito." Working paper, Instituto de riesgo financiero.
- González, A., and S. González. 2000. "Notas sobre R: Un entorno de programación para Análisis de Datos y Gráficos." Working paper, Instituto de Estadística de Andalucía.
- Gordon, A., and B. Alexandre. 2003. "CVaR as a Measure of Risk: Implication for Portfolio Selection." Working paper.
- Gordy, M. 2000. "A comparative anatomy of credit risk models." *Journal of Banking & Finance* 24:119–149.
- Gutiérrez, E. 2004. "Riesgo de crédito: El enfoque actuarial." Working paper.
- John, H. 2006. *Risk Management and Financial Institutions*. Prentice Hall.
- Johnson, T., and A. McNeil. . "Industrial Implementation of Merton." Working paper.
- Malevergne, S. 2006. *Extreme Financial Risks*. Springer.
- Masala, G., M. Menzietti, and M. Micossi. 2004. "Optimization of conditional VaR in an Actuarial Modelo for Credit Risk assuming a Student Copula Dependence Structure." Working paper.

- McNeil, A., R. Frey, and P. Embrechts. 2006. "Quantitative Risk Management." *Financial Markets and Portfolio Management* 20:239–240.
- Márquez Canedo, D.J. 2002a. "El impacto de la correlación entre impagos en la concentración de riesgo en portafolios de préstamos bancarios." Working paper, Banco de México.
- . 2002b. "Suficiencia de Capital y Riesgo de Crédito en Carteras de Préstamos Bancarios." Working paper, Banco de México.
- Márquez Canedo, D.J., and F. López-Gallo. 2002. "Un modelo de análisis el Riesgo de crédito y su aplicación para realizar una prueba de estrés del sistema financiero mexicano." Working paper, Banco de España.
- Márquez Canedo, J. 2006. *Una nueva visión del riesgo de crédito*. Limusa.
- Nyfelner, M. 2000. "Modeling Dependence in Credit Risk Management." Working paper, Swiss Federal Institute of Technology Zurich.
- Palmquist, J., S. Uryasev, and P. Krokmal. 1999. "Portfolio Optimization with conditional Value at Risk objective and constraints." Working paper, Center for Applied Optimization, University of Florida.
- Philippe, A., D. Freddy, E.M. Jean, and H. David. 1998. "Coherent Measures of Risk." Working paper.
- Prosper, L. 1993. *Risk Management and Financial Institutions*. McGrawHill.
- Rockafellar, R., and S. Uryasev. 2002. "Conditional value-at-risk for general loss distributions." *Journal of Banking & Finance* 26:1443–1471.
- Sanchez Cerón, C. 2001. *Valor en Riesgo y otras aproximaciones*. Editorial Valuación, Análisis y Riesgos S.C.
- Torres, G., and A. Olarte. 2005. "Valor en riesgo desde un enfoque de cópulas." Working paper, Universidad EAFIT.
- Trivedi, P., and D. Zimmer. 2007. *Modeling: An introduction for practitioners*. Now Publishers.
- Umberto, C., L. Elisa, and V. Walter. 2004. *Copula methods in finance*. Wiley.
- Vito, R. 2005. "Fitting distributions with R." Working paper.
- Yan, J. undated. "Enjoy the Joy of Copulas: With a Package copula." *Journal of Statistical Software* 21.